宮城学院女子大学発達科学研究
2026. 26. 21-31

既習の算数教材を見直し多様な解法を見出す
―図形の面積を例に―

中　込　雄　治[1]
黒　木　伸　明[2]

算数・数学において、ある1つの解法が理解され定着すると、その解法を最善のものと考えてしまうことが多い。したがって、別の解法を見出すことができる新たな知識を獲得しても、それが活かされない。しかし、学習が進んで既習事項が増えた段階で算数教材を振り返り見直すと、増えた既習事項を関連付けることによって、別の多様な解法を見出すことができるようになる。例えば中学校で文字式を学習すると、式の構造が把握でき、式の読みかえが可能となる。本稿では、文字式を既習として算数の図形教材を見直し、面積公式の構造を把握して式を読みかえることによって、多様な解法を見出すことができ、教材の内容がより深く理解できることを明らかにした。

Keywords：見直し教材、面積公式、式を読む、特殊と一般の関係、対の関係、多様な解法

1. はじめに

小学校の算数教材では、子どもの発達段階などを考慮して、特殊な解法のみを取り上げている場合が多い。またそれが定着すると、その解法が最善のものとして捉えられてしまう傾向がある。したがって、別の解法を見出すことができる新たな知識を獲得しても、それが十分に活かされない。しかし、子どもは学習段階の進展に伴って既習事項を増やし、成長に伴って理解力を高めていく。例えば中学校で文字式を学習すると、いろいろな数量の関係を文字で表すことができるようになる。式の構造が把握でき、同値関係を保ちながら式変形ができるので、式の読みかえが可能になる。文字式を学んだ段階で算数教材を振り返り見直すと、図形の面積公式などを構造的に把握することができ、式を様々に読みかえることによって、多様な解法を見出すことができるようになる。

本稿では、見直す教材として「三角形の面積」「平行四辺形の面積」「台形の面積」を取り上げ、式を読みかえることや解法の構造に着目することなどを通して、多様な解法を見出すことができることを示す。特殊な解法から一般化した解法を見出したり、さらに別の特殊な解法を見出したりすることによって、多様な解法を見出すことができ、教材の内容がより深く理解できることを明らかにする[1)]。

1. 元宮城学院女子大学教授
2. 上越教育大学名誉教授

2. 多様な解法を見出す方法

(1) 式を読む

まず公式に着目して、式を読みかえることによって、別の解法が見出されることを考察する。例えば多角形の内角の和については、中2において図1のように学習している[2)]。

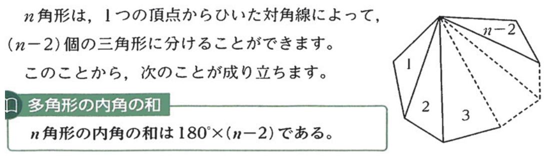


図1. 多角形の内角の和

図1に示されている公式$180°\times(n-2)$における$(n-2)$は、1つの頂点から引いた対角線によってn角形の内部につくられた三角形の個数を表している。ここでこの公式を分配法則を使って変形すると$180°\times n-360°$となるが、$180°\times n$はn個の三角形の内角の和、$360°$は点の周りを一回転する角度と捉えることができる。つまり公式を$180°\times n-360°$と読みかえることによって、図2図3図4のようにn角形の内部に任意の点をとると三角形がn個できることをもとにして、$180°\times n$から$360°$を引けばn角形の内角の和が求められるという解法が見出される[3)4)]。

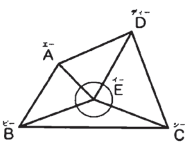


図2. 四角形

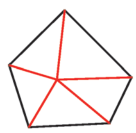


図3. 五角形

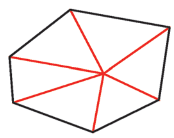


図4. 六角形

このように式を読みかえることは、別の解法を見出すのに有効な数学的手法であると言える。

(2)「特殊と一般の関係」と「対の関係」

中2の数学教科書には、図5のような長方形と平行四辺形の包含関係を表す図が示されている。この図から、平行四辺形の特殊な場合が長方形であり、長方形の条件をゆるめて一般化したものが平行四辺形であることが見て取れる[5)]。こうした特殊と一般の関係に着目することも多様な解法を見出すのに有効な数学的手法である。

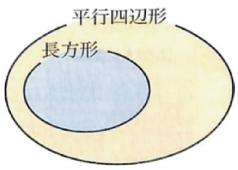


図5.　包含関係

また多様な解法を見出す際には、対の関係に着目するというのも有効である。ここでいう対の関係とは、右と左、上と下、和と差のような関係を指す。

例えば長方形・三角形・平行四辺形の面積の求め方を既知として、台形の面積の求め方を考えたとき、図6のように長方形と2つの直角三角形に分割してそれらの和として面積を求める解法を見出すことができる。ここで対の関係に着目すると、図7のように長方形から2つの直角三角形を除く、つまり差として面積を求める解法を見出すことができる。

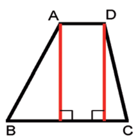


図6.　特殊

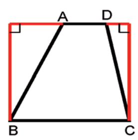


図7.　特殊

図6図7の解法は「長方形である」ことに依存していないので、ここで条件をゆるめて一般化を図ると、図6図7の長方形を平行四辺形にした図8図9の解法を見出すことができる。図8は平行四辺形と2つの三角形の和、図9は平行四辺形と2つの三角形の差として面積を求める解法であり、図6図7を一般化した解法がそれぞれ図8図9となり、逆に図8図9における特殊な解法がそれぞれ図6図7となっている。また図8図9も対の関係にあると言える。

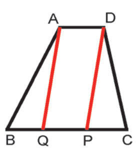


図8.　一般

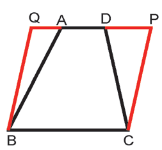


図9.　一般

図8図9の平行四辺形は任意に決められるので、図8の平行四辺形の頂点Pが台形の頂点Cに重なった特殊な解法として図10、図9の平行四辺形の頂点Qが台形の頂点Aに重なった特殊な解法として図11を見出すことができる。またこれら図10図11も対の関係にあると言える。

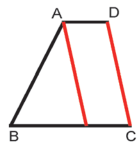


図10.　特殊

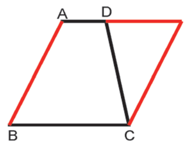


図11.　特殊

このとき図12のように図6の解法から図8さらに図10の解法を見出すことができ、同様に図13のように図7の解法から図9さらに図11の解法を見出すことができたと言える。

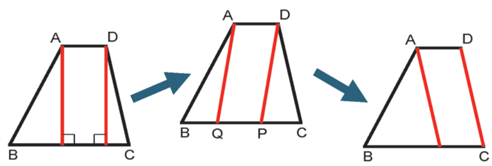


図12.　解法の関連

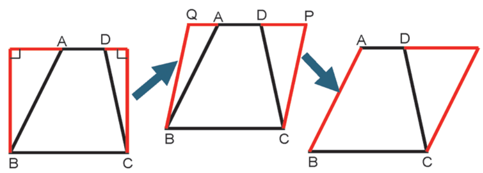


図13.　解法の関連

図12図13は解法の構造に着目すると図14のように捉えることができる。

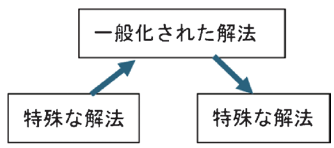


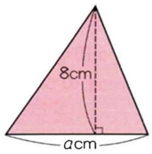
図14.　解法の構造

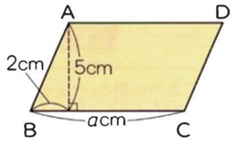
既習の算数教材を見直すことによって、こうした「特殊と一般の関係」や「対の関係」のような捉え方を数学的手法として活用することができ、多様な解法を見出すことができることを次章以降において示す。

3.　算数の見直し教材

小6の算数では、図15図16図17のような図形の面積を求めるときの様々な式表現に着目させ、求積の考え方を式表現から読みとることについて扱っている[6)]。本稿ではこれを見直し教材と位置づけ、式を読みかえ

て多様な解法を見出すことを検討する。





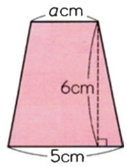


図15．三角形　図16．平行四辺形　図17．台形

上記の図形の面積を求める公式は小5において、

「三角形の面積＝底辺×高さ÷2」

「平行四辺形の面積＝底辺×高さ」

「台形の面積＝(上底＋下底)×高さ÷2」

として学習している[7]。中学で学ぶ文字式を用いると、これらの面積公式は、

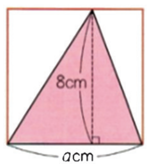
「$S=\frac{1}{2}ah$」「$S=ah$」「$S=\frac{1}{2}(a+b)h$」

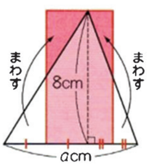
と表される[8]。この文字式による面積公式をもとにして、教科書に示された解法における式の読み方について見直していく。なお長方形・三角形・平行四辺形・台形の面積公式の他に、平行（小4)、三角形の合同（小5)、三角形の等積変形（中1)、中点連結定理（中3）などは既習事項とする[9]。

4．三角形の面積

(1) 教科書に示された解法

図15の三角形の面積の求め方に関しては、図18図19図20のような3つの解法が示されている[10]。





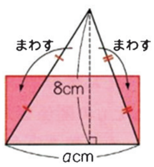


図18．倍積　図19．等積　図20．等積

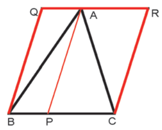
三角形の底辺の長さをa、高さをh、面積をSとすると面積公式は$S=\frac{1}{2}ah$と表される。この式のahを長方形の面積と捉えて$S=ah\times\frac{1}{2}$と読みかえると、図18のように三角形を倍積変形した長方形の面積をahと捉えて、その半分として三角形の面積を求める解法を見出すことができる。

また面積公式を$S=\frac{a}{2}\times h$と読みかえると、図19のように三角形を等積変形した長方形の面積を$\frac{a}{2}\times h$と捉えた解法を見出すことができる。

さらに面積公式を$S=a\times\frac{h}{2}$と読みかえると、図20のように三角形を等積変形した長方形の面積を$a\times\frac{h}{2}$と捉えた解法を見出すことができる。

(2) 図18から多様な解法を見出す

ここで図18をもとに、多様な解法を考察してみる。図18では面積公式を$S=ah\times\frac{1}{2}$と読みかえ、ahを長方形の面積として捉えたが、長方形の条件をゆるめたものが平行四辺形であることに着目し、ahを平行四辺形の面積として捉えると図21のような解法を見出すことができる。図21において点Pは底辺上にとった任意の点で、PA//BQ//CRであり、ahは平行四辺形QBCRの面積となる。このとき点Pは任意の点なので、点Pを頂点Bに重ね、線分APが辺ABに一致するように考えると、図22のような特殊な解法を見出すことができる。図22は合同な三角形2つでできた平行四辺形になっている[11]。



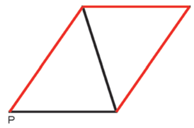


図21．一般　図22．特殊

つまり図23のように図18の解法から図21さらに図22の解法を見出すことができたと言える。(これは図14で示した解法の構造になっている。)

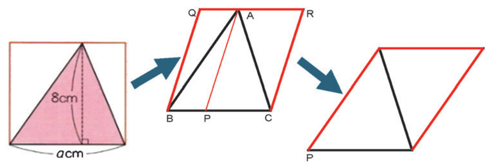


図23．解法の関連

(3) 図19から多様な解法を見出す

次に図19をもとに、多様な解法を考察してみる。図19では面積公式を$S=\frac{a}{2}\times h$と読みかえ、$\frac{a}{2}\times h$を長方形の面積として捉えたが、ここでも長方形の条件をゆるめたものが平行四辺形であることに着目し、$\frac{a}{2}\times h$を平行四辺形の面積として捉えると図24のような解法を見出すことができる。図24において点Pは底辺上にとった任意の点、点Q、Rはそれぞれ線分PB、PCの中点で、PA//QS//RTであり、$\frac{a}{2}\times h$は平行四辺形SQRTの面積となる。このとき点Pは任意の点なの

で、点Pを頂点Bに重ね、線分APが辺ABに一致するように考えると、図25のような特殊な解法を見出すことができる[12]。

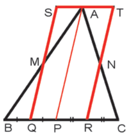


図24. 一般

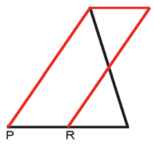


図25. 特殊

つまり図26のように図19の解法から図24さらに図25の解法を見出すことができたと言える。(これは図14で示した解法の構造になっている。)

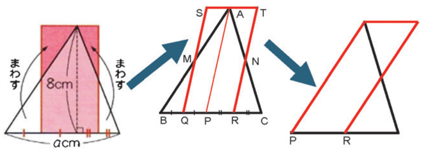


図26. 解法の関連

(4) 図20から多様な解法を見出す

次に図20をもとに、多様な解法を考察してみる。図20では面積公式を$S=a\times\frac{h}{2}$と読みかえ、$a\times\frac{h}{2}$を長方形の面積として捉えたが、ここでも長方形の条件をゆるめたものが平行四辺形であることに着目し、$a\times\frac{h}{2}$を平行四辺形の面積として捉えると図27のような解法を見出すことができる。図27において点M、Nはそれぞれ辺AB、ACの中点で点Pは線分MN上にとった任意の点、PA//BQ//CRであり、$a\times\frac{h}{2}$は平行四辺形QBCRの面積となる。このとき点Pは任意の点なので、点Pを点Mに重ね、線分APが線分AMに一致するように考えると、図28のような特殊な解法を見出すことができる。

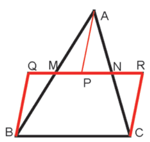


図27. 一般

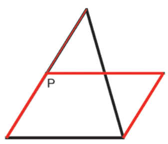


図28. 特殊

つまり図29のように図20の解法から図27さらに図28の解法を見出すことができたと言える。(これは図14で示した解法の構造になっている。)

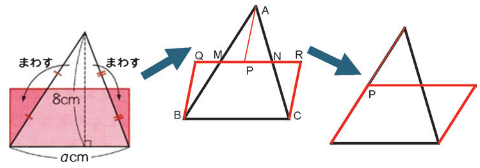


図29. 解法の関連

(5) 倍積変形の活用

他に、あらかじめ倍積変形した図形をつくっておき、その面積を二等分する場合を考えることによって、多様な解法を見出すこともできる。例えば図30のように長方形に倍積変形しておくことによって、図18や図20の解法を見出すことができる。また図31のように平行四辺形に倍積変形しておくことによって、図22や図25や図28の解法を見出すことができる。

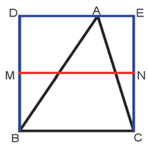


図30. 倍積変形

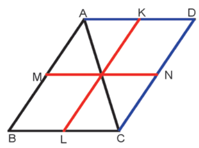


図31. 倍積変形

5. 平行四辺形の面積

(1) 教科書に示された解法

図16の平行四辺形の面積の求め方に関しては、図32図33図34のような3つの解法が示されている[13]。

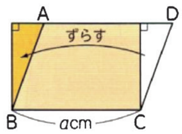


図32. 等積

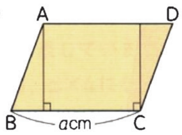


図33. 分割

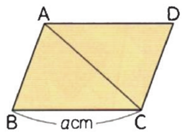


図34. 分割

平行四辺形の底辺の長さをa、高さをh、面積をSとすると面積公式は$S=ah$と表される。この式のahを長方形の面積と捉えると、図32のように平行四辺形を等積変形した長方形の面積をahと捉えて、平行四辺形の面積を求める解法を見出すことができる。

また図33のように平行四辺形を長方形と2つの合同な直角三角形に分割して平行四辺形の面積を求める解法を見出すこともできる。このとき頂点Aから辺BCに下ろした垂線の足をEとし、線分BEの長さをbとすると、式は$S=(a-b)h+\frac{1}{2}bh\times2$と読みかえたことになり、長方形と直角三角形の面積の和として平行四辺形の面積を求めている。

さらに図34のように平行四辺形を対角線で2つの合同な三角形に分割して平行四辺形の面積を求める解

法を見出すこともできる。このとき式は$S=\frac{1}{2}ah\times 2$と読みかえたことになり、三角形の2倍の面積として平行四辺形の面積を求めている。

(2) 図32から多様な解法を見出す

ここで図32をもとに、多様な解法を考察してみる。図32は頂点Cから辺ADに下ろした垂線で平行四辺形を切断している。頂点Cを通る垂線を特殊と捉えると、これを一般化した図35のような解法が考えられる[14]。図35では直線BC上にとった任意の点Pから辺ADに下ろした垂線PQによって平行四辺形を切断して、等積変形した長方形RSPQを見出している。またここで線分PQが辺CDと交わる場合を考えると、図36のように等積変形した長方形RSPQを見出すこともできる。

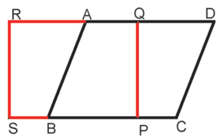


図35.　一般

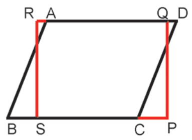


図36.　一般

さらにこのとき線分PQが辺CDの中点と交わった場合を考えると、図37のような解法を見出すことができる。この図37は図36の解法の特殊な場合と捉えることができる[15]。

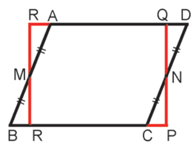


図37.　特殊

つまり図38のように図32の特殊な解法から図35図36の一般化された解法、さらに図37の特殊な解法を見出すことができたと言える。(これは図14で示した解法の構造をもとに展開したものになっている。)

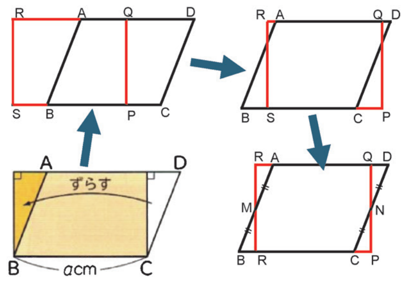


図38.　解法の関連

(3) 図33から多様な解法を見出す

次に図33をもとに、多様な解法を考察してみる。図33では平行四辺形を長方形と2つの直角三角形に分割し、それらの和として面積を求めている。ここで対の関係に着目すると、図39のような解法を見出すことができる。図39では平行四辺形を囲む長方形の面積から2つの直角三角形の面積を引いて、つまり差として平行四辺形の面積を求めている。

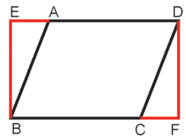


図39.　特殊

図39における線分AEの長さをbとすると、平行四辺形の面積公式を$S=(a+b)h-\frac{1}{2}bh\times 2$と読みかえたことになる。

(4) 図34から多様な解法を見出す

次に図34をもとに、多様な解法を考察してみる。図34では対角線で合同な三角形をつくり平行四辺形の面積を求めている。つまり面積公式を$S=\frac{1}{2}ah\times 2$…①と読みかえ、三角形の面積を2倍して求めている。

ここで三角形をつくることに着目してみると、例えば$S=\frac{1}{2}\times 2a\times h$…②、$S=\frac{1}{2}\times a\times 2h$…③などの式の読みかえが考えられる。②は底辺の長さを2倍にして等積変形した三角形をつくり、③は高さを2倍にして等積変形した三角形をつくり、それぞれ平行四辺形の面積を求めていると捉えることができる。②③の式をもとに多様な解法を考察してみる。

②においては、図40のような解法を見出すことができる。三角形AMDと三角形BMQは合同(二角夾辺相等)であるから、三角形DQCは平行四辺形を等積変形した三角形になっている。(三角形DQCの底辺QCの長さは$2a$であるので、式は$S=\frac{1}{2}\times 2a\times h$となる。)

このとき対の関係に着目すると、図41のような解法を見出すことができる。

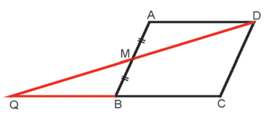


図40.　特殊

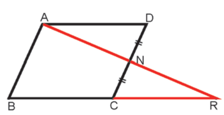


図41.　特殊

ここで対の関係にある図40と図41の解法を包含するような解法を考えると、図42のように平行四辺形の辺AD上にとった任意の点Pを用いて一般化した解

法を見出すことができる。平行四辺形は三角形PQRに等積変形されている。点Pが頂点Dに一致した場合が図40、頂点Aに一致した場合が図41の解法と捉えることができ、図40図41と図42の解法は特殊と一般の関係にあると言える。

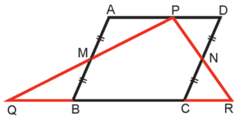


図42.　一般

これらの解法の関連は図43のように示される。また解法の構造に着目すると図44のように捉えることができる。このように対の関係にある解法を関連付けることによって、一般化された解法が見出されることもある。

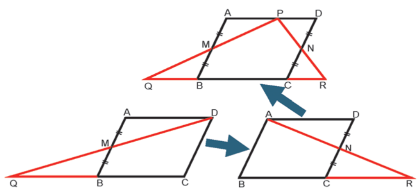


図43.　解法の関連

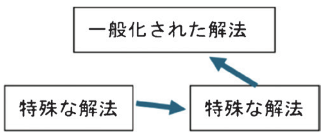


図44.　解法の構造

また三角形への等積変形は図45のようにして考えることもできる。頂点Dを通り対角線ACに平行な直線と直線BCとの交点をRとすると、三角形ACRは三角形ACDを等積変形したものになる。したがって三角形ABRが平行四辺形を等積変形した三角形になる。

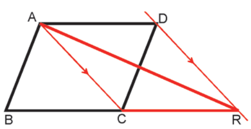


図45.　特殊

この図45の三角形への等積変形は結果として前述の図41と同じものになるが、図41は合同な三角形による等積移動を用いており、図45での平行線を用いた等積変形とはアイデアが異なるので、解法としては別ものとなる。図41を一般化して図42の解法を見出したように、ここでも図45を一般化して図46の解法を見出すことができる。

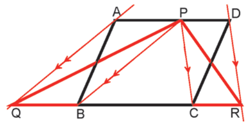


図46.　一般

③においては、図47のような解法が見出され、その対の関係から図48の解法、さらに図47図48を包含するような図49の解法を見出すことができる。図47図48と図49は特殊と一般の関係にあると言える。（図47図48の点Mは辺ADの中点、図49の点Pは線分EF上にとった任意の点である[16]。このときそれぞれの三角形の高さは$2h$であるので、式は$S=\frac{1}{2}\times a\times 2h$となる。）

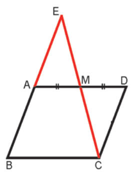


図47.　特殊

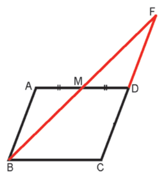


図48.　特殊

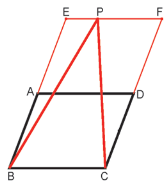


図49.　一般

図47図48図49の解法の関連は図50のように示される。（これは図44で示した解法の構造になっている。）

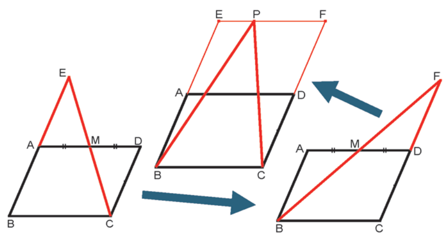


図50.　解法の関連

(5) 倍積変形の活用

平行四辺形は対角線で面積が2等分されることに着目すると、図51のように平行四辺形を横に倍にした平行四辺形ABEFをもとに、対角線で2等分して元の平行四辺形を等積変形した三角形ABEをつくる解法を見出すことができる。さらに対の関係に着目すると、図52のように縦に倍にした平行四辺形GBCHをもとに、対角線で2等分して元の平行四辺形を等積変形した三角形GBCをつくる解法を見出すことができる。

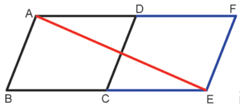


図51．倍積変形

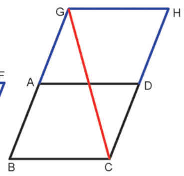


図52．倍積変形

式に着目すると図51は底辺の長さを$2a$、高さをhとした三角形の面積として、$S=\frac{1}{2}\times 2a\times h$と読みかえたことになる。同様に図52は底辺の長さをa、高さを$2h$とした三角形の面積として、$S=\frac{1}{2}\times a\times 2h$と読みかえたことになる。

平行四辺形を図51では横に倍にして底辺の長さを$2a$、図52では縦に倍にして高さを$2h$としている。ここでこれらを図53のように合わせると、底辺の長さ$2a$、高さ$2h$の三角形GBEを見出すこともできる。これは平行四辺形を倍積変形した三角形で、式を$S=\left(\frac{1}{2}\times 2a\times 2h\right)\times\frac{1}{2}$と読みかえたことになる。

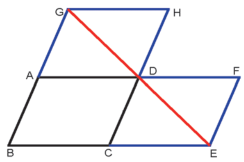


図53．特殊

6．台形の面積

(1) 教科書に示された解法

図17の台形の面積の求め方に関しては、図54図55のような2つの解法が示されている[17]。

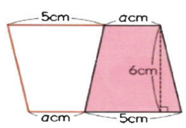


図54．倍積

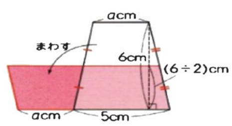


図55．等積

台形の上底下底の長さをそれぞれa、b、高さをh、面積をSとすると、面積は$S=\frac{1}{2}(a+b)h$と表される。この式において$(a+b)h$を平行四辺形の面積と捉えて$S=(a+b)h\times\frac{1}{2}$と読みかえると、図54ように台形を倍積変形した平行四辺形の面積を$(a+b)h$と捉えて、その半分として台形の面積を求める解法を見出すことができる。

また面積公式を$S=(a+b)\times\frac{h}{2}$と読みかえると、図55のように台形を等積変形した平行四辺形の面積を$(a+b)\times\frac{h}{2}$と捉えて台形の面積を求める解法を見出すことができる[18]。

(2) 図54から多様な解法を見出す

ここで図54をもとに、多様な解法を考察してみる。図54では$(a+b)h$を倍積変形した平行四辺形の面積と捉えているが、これを倍積変形した長方形の面積と読みかえると、例えば図56のような頂点Aから辺BCに下ろした垂線をもとに倍積変形した長方形を見出すことができる。このときこの図56を特殊な解法と捉えて一般化を考えてみると、図57のように上底にとった任意の点Pから下底に下ろした垂線PQをもとに倍積変形した長方形による解法を見出すことができる。

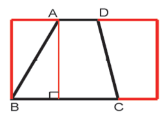


図56．特殊

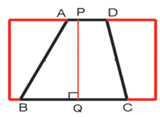


図57．一般

またここで長方形の条件をゆるめて一般化を図ると、図58のような任意の線分PQをもとに倍積変形した平行四辺形による解法を見出すことができる。さらにこの図58における任意の線分PQを対角線ACに一致させた場合を考えると図59のような特殊な解法を見出すことができる。（図58の線分PQを辺DCに一致させた場合が図54の特殊な解法となる。）

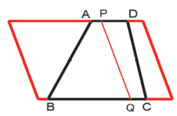


図58．一般

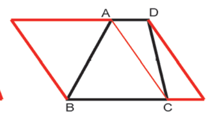


図59．特殊

つまり図60のように図54の解法から図56図57図58図59の解法を見出すことができたと言える。（これは図14で示した解法の構造をもとに展開したものになっている。）

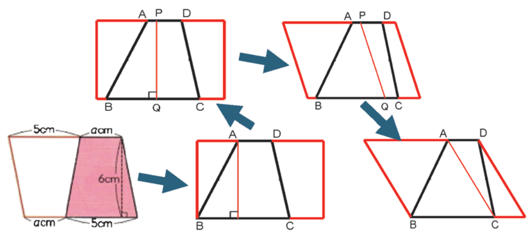


図60．解法の関連

(3) 図55から多様な解法を見出す

次に図55をもとに、多様な解法を考察してみる。図55では $(a+b)\times\dfrac{h}{2}$ を台形を等積変形した平行四辺形の面積と捉えているが、これを等積変形した長方形の面積と読みかえると、例えば図61のように辺AB、DCの中点をM、Nとし、頂点Aから線分MNに下ろした垂線をもとに等積変形した長方形を見出すことができる。このときこの図61を特殊な解法と捉えて一般化を考えてみると、図62のように上底にとった任意の点Pから線分MNに下ろした垂線PQをもとに等積変形した長方形による解法を見出すことができる。

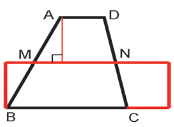


図61．特殊

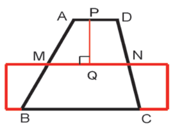


図62．一般

またここで長方形の条件をゆるめて一般化を図ると、図63のような任意の線分PQをもとに等積変形した平行四辺形による解法を見出すことができる。さらにこの図63における任意の線分PQを線分ANに一致させた場合を考えると図64のような特殊な解法を見出すことができる。（図63の線分PQを線分DNに一致させた場合が図55の特殊な解法となる。）

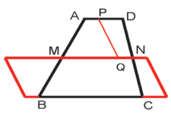


図63．一般

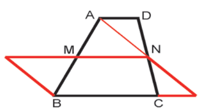


図64．特殊

つまり図65のように図55の解法から図61図62図63図64の解法を見出すことができたと言える。（これは図14で示した解法の構造をもとに展開したものになっている。）

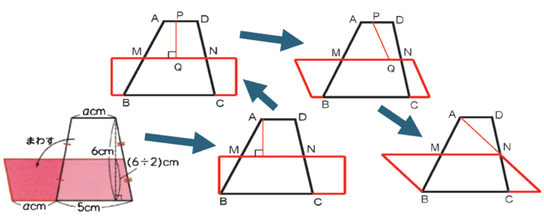


図65．解法の関連

(4) さらに多様な解法を見出す

他に、面積公式を $S=\dfrac{(a+b)}{2}\times h$ のように読みかえて、$\dfrac{(a+b)}{2}\times h$ を等積変形した長方形の面積と見れば、図66のように辺AB、DCの中点M、Nを通り辺BCに垂直な直線をもとに等積変形した長方形を見出すことができる。このとき図66を特殊な解法と捉えて長方形の条件をゆるめて一般化を図ると、図67のように辺BC上にとった任意の点Pをもとにつくった平行四辺形RSPQを見出すことができる。さらにこの特殊な場合として平行四辺形の辺RSが台形の辺ABに重なった図68のような平行四辺形を見出すことができる。

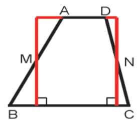


図66．特殊

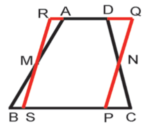


図67．一般

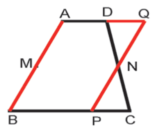


図68．特殊

つまり図69のように図66の解法から図67さらに図68の解法を見出すことができたと言える。（これは図14で示した解法の構造になっている。）

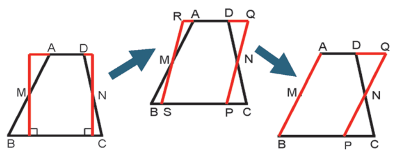


図69．解法の関連

また三角形に分割したり等積変形する解法も考えられる。図70は対角線で2つの三角形に分割した場合で式を $S=\dfrac{1}{2}ah+\dfrac{1}{2}bh$ と読みかえている。図71は辺ABの中点Mを用いて台形を等積変形した三角形を見出しており、式 $S=\dfrac{1}{2}(a+b)h$ を底辺の長さ $a+b$、高さ h の三角形の面積と読みかえている。

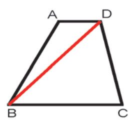


図70．特殊

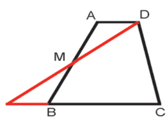


図71．特殊

ここで図71を特殊な解法と捉えて一般化した解法を考えてみる。まず図71と対の関係にある図72の解法を見出しておく。そして図71と図72を包含するような解法を検討していくと、図73のように上底にとった任意の点Pを用いて台形を等積変形した三角形を見出すことができる。点Pが頂点Dの位置にあるときが図71、点Pが頂点Aの位置にあるときが図72の解法である。

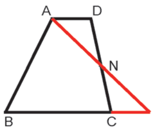


図72.　特殊

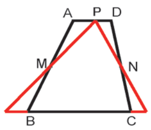


図73.　一般

つまり図74のように対の関係にある図71と図72の解法から図73の解法を見出すことができたと言える。(これは図44で示した解法の構造になっている。)

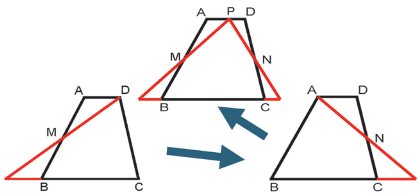


図74.　解法の関連

(5) 倍積変形の活用

また図75のように台形を倍積変形した平行四辺形ABEFをつくると、辺DCの中点Mを通る任意の直線でこの平行四辺形の面積は2等分される。その特殊な場合に着目することによって、台形ABCDを等積変形した三角形ABEや平行四辺形ABHGなどを見出すことができる。(図75から図54図55図68図71図72のような解法が見出される。)

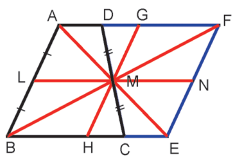


図75.　倍積変形

7.　面積公式における特殊と一般

$S=\frac{1}{2}(a+b)h$ は、図76のように上底下底の長さをそれぞれa、b、高さをh、面積をSとして、台形の面積公式「台形の面積＝(上底＋下底)×高さ÷2」を文字を使って一般化して表したものであった。このとき文字を特定の数と見なしたり、文字と文字に特定の関係を持ち込んだりすることによって、この面積公式を様々に読みかえることができる。

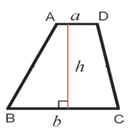


図76.　台形

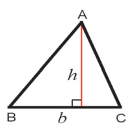


図77.　三角形

ⅰ) $a=0$ とすると面積公式は $S=\frac{1}{2}bh$ となり、図77のような三角形を表すことになる。

ⅱ) $a=b$ とすると面積公式は $S=ah$ となり、図78のような長方形あるいは図79のような平行四辺形を表すことになる。

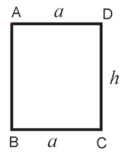


図78.　長方形

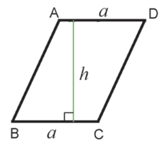


図79.　平行四辺形

ⅲ) $a=b=h$ とすると面積公式は $S=a^2$ となり、図80のような正方形あるいは図81のような平行四辺形を表すことになる。

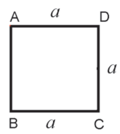


図80.　正方形

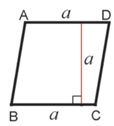


図81.　平行四辺形

このように式を読みかえることによって、台形の面積公式の特殊な場合として、三角形・長方形・平行四辺形・正方形の面積公式を見出すことができる。

8.　まとめ

本稿では、見直し教材として「三角形の面積」「平行四辺形の面積」「台形の面積」を取り上げ、「式を読む」「特殊と一般の関係」「対の関係」などに着目することにより、多様な解法を見出すことができることを明らかにした。子どもの成長に伴い増えた既習事項を活用して算数教材を見直すことによって、新たな解法を見出し、構造的に解法を関連付けて把握することができ、面積公式に関する理解をより深めることができた。

また見直し教材を通して多様な解法を見出す過程において、①多様な解法が存在すること、②多様な解法を見出す方法があること、などが把握できた。解法は1つでそれを覚えるのが算数・数学の学習だと捉えている子どもが多い中、この①②を把握することの意義は大きい。本来解法は既習事項を関連付けて自分なりに見出していくものである。そうした自ら解法を見出す活動が算数・数学の学習であると捉え直すのに、本稿で示した見直し教材は有効に作用すると考えている。

今後も、子どもの成長に伴って理解の深化が起こることを念頭に置きながら、算数・数学の見直し教材の開発を行っていきたいと考えている。

註

1）小4の「平行線の作図」「平行四辺形の性質」、小5の「三角形・四角形の内角の和」「三角形の合同」、小6の「分数の割算」を算数の見直し教材とすることで得られる知見に関しては、中込・黒木（2021、2024、2025）において示した。

2）図1は数学教科書（日本文教中2 p.108、2021年度版）に掲載されている。

3）図2は算数教科書（東京書籍小5上 p.89、2020年度版）に掲載されており、子どもに $180°\times n-360°$ を想起させる伏線になっている。この $180°\times n-360°$ の方が三角形の個数（n 個）が把握しやすく式の意味も理解しやすい。

4）任意の点を頂点にとった場合が図1の多角形の図形と捉えることもできる。ここには次節で述べている「特殊と一般の関係」が見出せる。

5）図5は数学教科書（啓林館中2 p.147、2021年度版）に掲載されており、同頁に「長方形は、平行四辺形の特別なものである」とある。

6）図15図16図17は算数教科書（啓林館小6 pp.33–34、2020年度版）に掲載されている。

7）小学校における図形の面積指導の流れには、［長方形→三角形→平行四辺形→台形］と［長方形→平行四辺形→三角形→台形］の2通りがあり、算数教科書6社（啓林館・東京書籍・教育出版・学校図書・大日本図書・日本文教、2020年度版）のうち啓林館のみが前者で、他は後者の流れを採用している。

8）「$S=\frac{1}{2}ah$」の a、h は三角形の底辺の長さと高さ、「$S=ah$」の a、h は平行四辺形の底辺の長さと高さ、「$S=\frac{1}{2}(a+b)h$」の a、b、h は台形の上底と下底の長さと高さを表している。

9）既習事項は解法の証明などに必要となる。また三角形の等積変形は、中学の数学教科書（学校図書中1 p.178、2021年版）において図82のように平行線との関連で示されている。

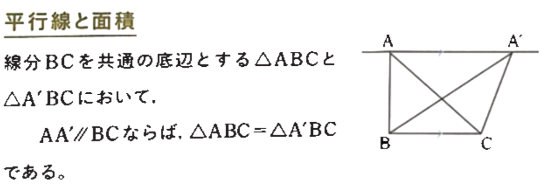


図82.　等積変形

10）図18図19図20は算数教科書（啓林館小6 p.33、2020年度版）に掲載されている。なおこの章においては長方形や平行四辺形の面積に帰着させて三角形の面積を求める。

11）図22は算数教科書全6社（学校図書小5下 p.50・教育出版小5 p.206・啓林館小5 p.138・大日本図書小5 p.211・東京書籍小5下 p.52・日本文教小5下 p.84、2020年度版）に掲載されている解法である。

12）図24において点M、Nはそれぞれ辺AB、ACの中点、図25において点Rは三角形の底辺の中点になっている。

13）図32図33図34は算数教科書（啓林館小6 p.34、2020年度版）に掲載されている。なおこの章においては長方形や三角形の面積に帰着させて平行四辺形の面積を求める。

14）図32は「頂点Cを通る垂線」に依存しない解法なので、条件をゆるめて「直線BC上にとった任意の点を通る垂線」に一般化することができる。

15）図37は算数教科書3社（学校図書小5下 p.44・啓林館小5 p.135・東京書籍小5下 p.46、2020年度版）に掲載されている解法である。算数教科書では図83（東京書籍）のように直角三角形を上下で移動させている。これを左右で移動させていると捉えると、この解法を一般化した図36の解法を見出すことができる。

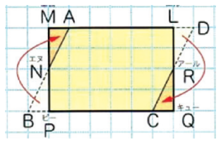


図83.　特殊

16）図49の点E、Fは図47図48の点E、Fに対応している。

17）図54図55は算数教科書（啓林館小6 p.33、2020年度版）に掲載されている。なおこの章においては長方形・平行四辺形・三角形の面積に帰着させて台形の面積を求める。

18）図55の解法では、左右の辺の中点を結んだ直線が上底下底と平行であることを前提にしている。これは例えば中点連結定理を使うと、図84の台形をもとに以下のように証明することができる。

対角線ACの中点をLとすると、

△ABCにおいて中点連結定理から、ML//BC ①

△ACDにおいて中点連結定理から、LN//AD ②

ここでAD//BCであるから②より、LN//BC ③

点Lを通りBCに平行な直線は1本しかないので、

③より直線MLと直線LNは一致する。

よって直線MNは上底（AD）下底（BC）に平行である。

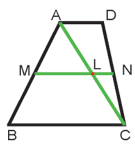


図84.　MN//AD//BCの証明

参考文献

黒木伸明、教員養成の立場から見た小学校教師の数学的リテラシー、日本数学教育学会誌 76–12、pp.2–7、1994 年

黒木伸明・前川利広、式を読むことによる多様な考え方の育成ついて、数学教育学会春季年会発表論文集、pp.87–89、2002 年

山城保史・黒木伸明、発展的教材のあり方—台形の面積を例に—、日本科学教育学会研究報告 18 巻 1 号、pp.1–6、2003 年

中込雄治、多様な考え方を引き出す数学教材の開発に関する研究、日本数学教育学会誌数学教育論究 Vol86、pp.43–49、2005 年

中込雄治・黒木伸明、算数・数学における教材の発展的な扱いについて—平行線の作図を例に—、宮城学院女子大学発達科学研究 No.21、pp.11–21、2021 年

中込雄治・黒木伸明、学習段階に応じた算数教材の発展的な扱いについて—分数の割算を例に—、宮城学院女子大学発達科学研究 No.24、pp.43–52、2024 年

中込雄治・黒木伸明、既習の算数教材を見直すことで培われるもの—三角形の合同条件などを例に—、宮城学院女子大学発達科学研究 No.25、pp.37–48、2025 年