

既習の算数教材を見直すことで培われるもの —三角形の合同条件などを例に—

中 込 雄 治¹

黒 木 伸 明²

数学の学習では、証明によって論理的に根拠を押さえながら、数学の法則を導いたりその活用方法を学んだりしていく。しかし、小学校では子どもの発達段階などを考慮して、論理的根拠を十分に示さないまま、帰納的に確認するだけで学習を進めている教材もある。こうした教材を見直し教材と位置づけ、子どもが学習段階の進展に応じて教材を振り返り見直すことによって、教材の内容の理解をより深めていくことができる。本稿では見直し教材として、図形分野における「三角形・四角形の内角の和」「平行四辺形の性質」「三角形の合同条件」などを取り上げ、教材を比較したり扱い方を分析したりすることによって、帰納と演繹、特殊と一般、定義と性質の関係をより深く捉え直すことができることを明らかにした。

Keywords : 算数・数学教材、三角形の合同条件、帰納と演繹、特殊と一般、定義と性質

1. はじめに

数学では、定義に基づき証明によって論理的に根拠を押さえながら、数学の法則やその活用方法について学習していく。小学校における算数の学習も同様であるが、子どもの発達段階を考慮して論理的根拠に触れないまま、つまり帰納的に確認するだけで済ましている教材もある。本稿ではそのような教材に着目し、子どもが学習段階の進展に応じて算数・数学教材を振り返り見直すことによって、帰納と演繹、特殊と一般、定義と性質の関係をより深く捉え直すことができることを明らかにする。見直し教材として、図形分野における「三角形・四角形の内角の和」「平行四辺形の性質」「三角形の合同条件」などを取り上げる¹⁾。

2. 三角形・四角形の内角の和

(1) 帰納と演繹

小学校では、「三角形の内角の和は 180° である」ことを、図1のように実際に三角形の紙を切り貼りしたり、あるいは分度器で角度を実測したりし

て、帰納的な方法で確認している。



図1 算数教科書（東京書籍2020年度版）小5上
p. 86

これに対して中学校では、図2のように辺ABに平行な直線CEを引いて同位角や錯角を用いて証明するという、演繹的な方法で「三角形の内角の和」を導いている。

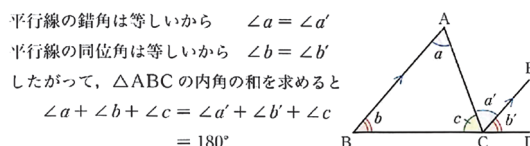


図2 数学教科書（東京書籍2021年度版）中2
p. 105

このように小学校と中学校での教材の扱い方に着目すると、帰納と演繹という数学的手法の違いを対比して捉えることができる。帰納による推測ではすべての場合で成り立つかどうかは確かめられないので、演繹により論理的に根拠を押さえて

1. 元宮城学院女子大学教授

2. 上越教育大学名誉教授

すべての場合において成り立つことを示すことになる²⁾。こうした帰納と演繹に対する理解を深めると、帰納的に予測して演繹的に根拠を示すというように、帰納と演繹を思考の手段として捉え直すことができる。

「四角形の内角の和は 360° である」ことを求める際には、小学校においても演繹的な方法を用いている。つまり図3のように対角線を引き、「四角形は対角線で2つの三角形に分割でき、三角形の内角の和は 180° であるから、 $180^\circ \times 2 = 360^\circ$ 」として論理的根拠を押さえ、一般的に成り立つ数学的事実として「四角形の内角の和は 360° である」ことを求めている。

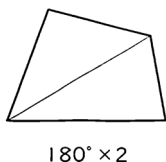


図3 算数教科書（大日本図書2020年度版）小5 p. 20

ここでは「三角形の内角の和は 180° である」という既習の数学的知識と「四角形を対角線で分割して三角形をつくる」という数学的アイデアを関連付けているので、この演繹的な方法の論理体系は図4のような関連図で表すことができる。

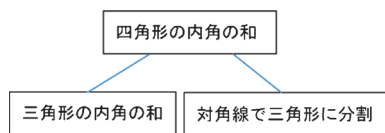


図4 「四角形の内角の和」の関連図

「五角形の内角の和」を求める際においても、図5のように分割して、「三角形・四角形の内角の和」という既習の数学的知識と「五角形を対角線で分割する」という数学的アイデアを関連付けて、論理的に根拠を押さえながら求めている。

すでに証明したことを基にしながら、論理体系を築くという演繹的手法に対する理解を深めると、このように「多角形の内角の和」を求める際にも

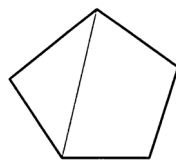


図5 算数教科書（大日本図書2020年度版）小5 p. 25

演繹的な方法を思考の手段として活用していることがつかめるようになる。

(2) 特殊と一般

「四角形の内角の和は 360° である」ことの証明方法に着目すると、小学校では図3の他に図6のような証明にも触れている。

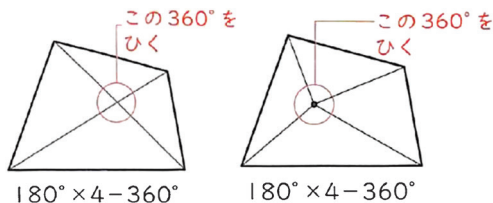


図6 算数教科書（大日本図書2020年度版）小5 p. 23

図3の証明と図6左右の証明は一見別々の証明のように見えるが、特殊と一般の関係を見出すという観点で見直すと、3つの証明が関連付けられてつながっていることがわかる。つまり図6右の証明は任意にとった点と各頂点を結んで4つの三角形に分割しているが、この点は任意の点であることに着目して、これがちょうど左下または右上の頂点の位置にある場合が図3、ちょうど対角線の交点の位置にある場合が図6左と捉えると、図3と図6左の証明は図6右の証明の特殊な場合であり、逆に図6右の証明は図3や図6左の証明を一般化したものであると関連付けて捉えることができる。図7はこれらの証明の関係を体系的に表した関連図である。（矢印は、矢印元の証明が矢印先の証明方法に含まれることを表している。）

この特殊と一般の関係を見出すという方法を、多様な証明を見出す数学的手法と捉え、中学校での教材「三角形の内角の和」を見直してみる。中

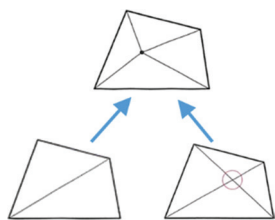


図7 証明の関連図「四角形の内角の和」

学校の教科書には図2の証明の他にも、図8のように頂点Aを通り辺BCに平行な直線DEを引いて、同位角と錯角を用いて三角形の内角を頂点Aの周りの平角に帰着させる証明が載っている。

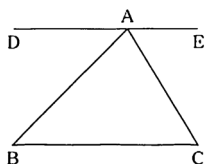


図8 数学教科書（東京書籍2021年度版）中2 p. 106

ここで図2と図8の証明を特殊な場合と捉え、これら2つを結びつけるように一般化を図ると、例えば図9のように三角形の頂点を通る3本の平行線を基にした証明を見出すことができる。これらの平行線は連動して動く任意の平行線である。同位角や錯角を用いて三角形の内角を頂点Cの周りの平角に帰着させている。

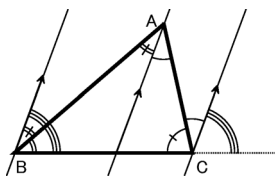


図9 「三角形の内角の和」の証明

ここでこれら3本の平行線を連動して動かしてみたとき、頂点Aを通る直線と頂点Bを通る直線が辺ABに重なった場合が図2の証明、頂点Bを通る直線と頂点Cを通る直線が辺BCに重なった場合が図8の証明であると捉えることができる。つまり図2図8の証明は図9の証明の特殊な場合

であり、逆に図9の証明は図2図8の証明を一般化したものであると捉えることができ、図2図8の証明と図9の証明に特殊と一般の関係を見出すことができる。

他にも、図10のように任意の点Pをとり、この点Pを通り三角形の3辺に平行な3直線を引いた証明を見出すことができる。同位角や錯角を用いて三角形の内角を点Pの周りの平角に帰着させている。

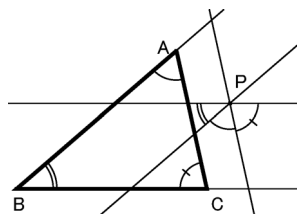


図10 「三角形の内角の和」の証明

ここで点Pが頂点Cにあった場合が図2の証明、頂点Aにあった場合が図8の証明と捉えると、図2図8の証明と図10の証明が特殊と一般の関係で関連付けられる。図10の点Pは任意の点なので、三角形の内部や辺上にある場合などを想定することによって、さらに多様な証明の発見につなげることもできる。図11は、図2図8図9図10の証明の関係を体系的に表した関連図である。

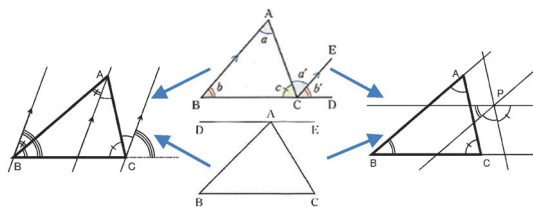


図11 証明の関連図「三角形の内角の和」

ここでは小学校での「四角形の内角の和」を見直し教材として取り上げることによって、特殊と一般の関係で証明を関連付けて捉え直すことができ、中学校での「三角形の内角の和」における証明を見直すことによって、この特殊と一般の関係に着目する方法は、多様な証明を見出す手法としても有効であることが確認できた³⁾。

3. 平行四辺形の性質

(1) 定義と性質

小4の教科書では、「平行四辺形の定義」を
 [定義] 向かい合う2組の辺が平行な四角形
 として押さえたあと、図12のように平行四辺形の
 辺の長さや角の大きさを実測することによって、
 「平行四辺形の性質」を帰納的に見出している。
 対角線の関係も含めて、次の3つが「平行四辺形
 の性質」としてまとめられている⁴⁾。

[性質1] 向かい合う辺の長さは等しい

[性質2] 向かい合う角の大きさは等しい

[性質3] 2本の対角線は交点で2等分される

① コンパスや分度器を使って、辺の長さや角の大きさを調べましょう。

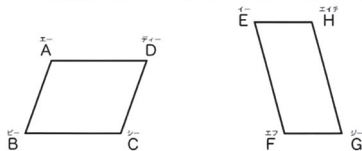


図12 算数教科書（東京書籍2020年度版）小4下
p. 31

しかし中学校では、これら「平行四辺形の性質」
 は「平行四辺形の定義」から導かれるものとして、
 定義を基にしてこれらの性質を証明している。図
 13は「[性質1] 向かい合う辺の長さが等しい」
 の証明である。定義を基にしながら三角形の合同
 条件を用いることによって証明している。

対角線BDを引く。

$\triangle ABD$ と $\triangle CDB$ において、

平行線の錯角は等しいから、

$AB \parallel DC$ より、 $\angle ABD = \angle CDB$ ①

$AD \parallel BC$ より、 $\angle ADB = \angle CBD$ ②

また、BDは共通 ③

①、②、③より、1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから、

$\triangle ABD \equiv \triangle CDB$

したがって、 $AB = DC$ 、 $AD = BC$

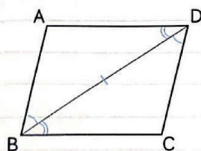


図13 数学教科書（学校図書2021年度版）中2
p. 160

つまり、平行四辺形の定義と性質はそれぞれ独
 立して無関係にあるものではなく、本来これらの
 性質は定義を基にして証明されるという関係に

あったのだとわかる。すでに認めてきたものをな
 ぜわざわざ証明しなければならないのか疑問に
 思っている子どもも多いので、こうした捉え直し
 は大切である。図14は中学校の教科書からの抜
 粋であるが、定義と性質の関係が図で示されてい
 る⁵⁾。

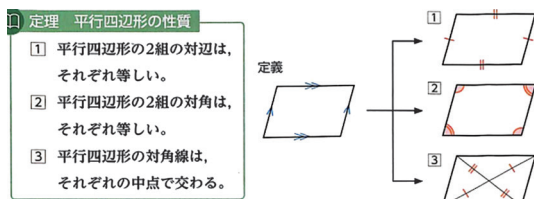


図14 数学教科書（日本文教2021年度版）中2
p. 147

このように「平行四辺形の性質」を見直し教材
 として小学校と中学校での扱い方を比較して見直
 すことによって、平行四辺形の定義と性質の関係
 を捉え直すことができ、性質は定義から導かれる
 という認識をより深めることができる。

(2) 平行の定義

小学校での定義と中学校での定義が異なってい
 る場合もある。「平行の定義」は小学校では「1
 本の直線に垂直な2本の直線は平行である」⁶⁾と
 しているが、中学校では「平面上の交わらない2直
 線は平行である」⁷⁾としている。このような「平
 行の定義」を見直し教材として、小学校と中学校
 の定義の違いに着目すると、定義の仕方は変える
 ことができるのだということがわかる。

一般に平行な2直線とは「①同位角が等しい2
 直線」「②幅が一定の2直線」「③交わらない2直
 線」のことを指す⁸⁾。そのことを基に小学校と中
 学校での扱い方を見直すと、小学校では「①同位
 角が等しい2直線」において同位角が直角になる
 特殊な場合に限定して「1本の直線に垂直な2本
 の直線は平行である」と定義しており⁹⁾、中学校
 では③をそのまま定義にしていることがわかる。
 定義として選んだもの以外は性質と位置付けるこ
 とができ、この場合も性質は定義に基づいて証明
 することができるので、例えば「①同位角が等し

い2直線」を定義とすると、これを基にして「②幅が一定の2直線」が平行になることと、「③交わらない2直線」が平行になることを証明することができる。(この証明は中学校では扱っていない。)

定義の仕方を変えることは、平行四辺形の場合に当てはめても、同様に考えることができる。例えば前述の「定義」と「性質1」を入れ替えて平行四辺形の定義を、

「定義」向かい合う辺の長さが等しい四角形

とすれば、これを基にこの四角形において

「性質1」向かい合う2組の辺は平行である

「性質2」向かい合う角の大きさは等しい

「性質3」2本の対角線は交点で2等分される

などを証明することができることになる。

このように発展させると、「平行線の定義」を見直し教材として扱うことによって、定義と性質の捉え方をさらに豊かにしていくことができる¹⁰⁾。

4. 三角形の合同条件

(1) 三角形の検証

図13のように、図形の証明の中で三角形の合同条件は頻繁に使われ、演繹的に論を進めていく上で大変重要な役割を果たしている。この三角形の合同条件は小学校5年と中学校2年で扱っている教材である。小5では図15のように三角形が提示され、これと合同な三角形の作図が取り上げられている。

4

下の三角形ABCと合同な三角形のかき方を考えましょう。



三角形は、3つの頂点の位置が決まるとかけるね。どの辺の長さや角の大きさを使えば、3つの頂点の位置が決まるかな。

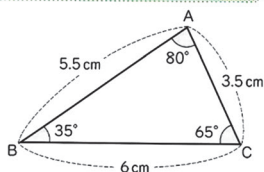


図15 算数教科書（東京書籍2020年度版）小5上 p. 77

図15の三角形は角の大きさや辺の長さが具体的な数値で示されており、その値に着目すると、

80° 、 35° 、 65° 、6 cm、3.5 cm、5.5 cmというきれいな値になっていることがわかる。児童は教科書に載っているのだから、これらの値で実際に三角形が存在すると思い込んでいる。しかし高校で学習する三角比表などを基に見直してみると、例えば 80° 、 35° 、 65° の余弦の値は概数でそれぞれ0.1736、0.8192、0.4226となっていることなどから、図15の三角形の辺や角の値は誤差を丸めたものであることがわかる¹¹⁾。実際に余弦定理

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos C$$

の式のAC、BC、 $\angle C$ に3.5、6、 65° を代入して、辺ABの長さを求めると $AB \approx 5.52$ となり、5.5にはならない。また図形ソフトを活用して、与えられた3辺AB、BC、CAの長さを基に三角形を作図して角度を小数第一位までの精度で表示させると図16のようになり、三辺相等で合同な三角形を作図しても角度はきれいな数値（整数値）にはならないことがわかる¹²⁾。

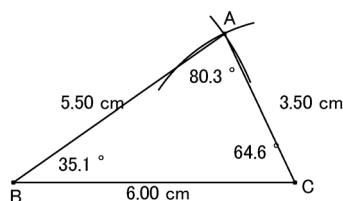


図16 図形ソフトによる三角形の作図

このように三角比表を学習した段階などにおいて小5の教材を見直すと、図15の三角形は児童が扱いやすいように誤差を丸めた数値をあえて使っていたのだということが理解できる¹³⁾。

(2) 合同な三角形の作図

小学校では三角形の合同条件を帰納的に確認している。図15の三角形と合同な三角形を作図するために、まず辺BCをかくておき、そのあと頂点Aを決める方法として図17図18図19の3つが挙げられている。図17は「二辺夾角相等」（2つの辺の長さとその間の角の大きさが相等）、図18は「二角夾辺相等」（2つの角の大きさとその間の辺の長さが相等）、図19は「三辺相等」（3つの辺の長さが相等）という三角形の合同条件に対応

している。

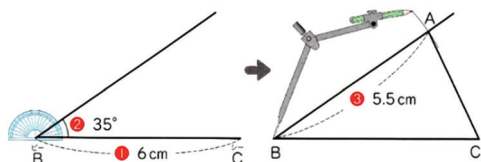


図17 算数教科書（東京書籍2020年度版）小5上 p. 78

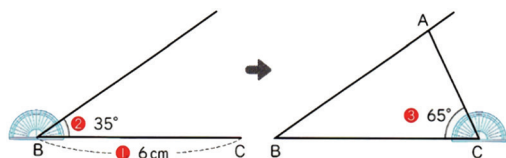


図18 算数教科書（東京書籍2020年度版）小5上 p. 78

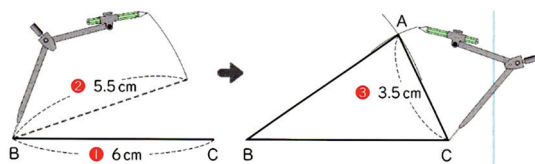


図19 算数教科書（東京書籍2020年度版）小5上 p. 78

教科書では、これらは3人の児童の考えとして紹介されており、図20のように「辺の長さや角の大きさのうちの3つを使うと3つの頂点の位置を決めることができ、合同な三角形をかくことができる」とまとめられている。

まとめ

三角形ABCは、上の3人の考えのように、辺の長さや角の大きさのうちの3つを使うと3つの頂点の位置を決めることができ、合同な三角形をかくことができる。

図20 算数教科書（東京書籍2020年度版）小5上 p. 79

このあと、図21のように「2つの辺の長さ、その間にない角の大きさ」では合同でない三角形がかけってしまう場合があることに触れている。

図15の作図では、あらかじめ三角形の角の大きさと辺の長さの情報がすべて与えられてしまっ

通信 頂点Aが2つ？

2つの辺の長さと、その間にない角の大きさをを使うと、合同ではない三角形がかけしてしまうことがあります。



頂点Aが2つできてしまい、1つに決まらないからね。

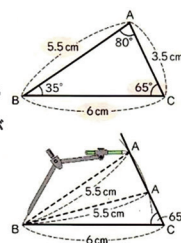


図21 算数教科書（東京書籍2020年度版）小5上 p. 80

ているので、最低限どのような情報が必要なのか吟味しようという観点が生じにくい¹⁴⁾。そこでこの教材を、合同な三角形を合理的に作図するために、最低限どのような情報が必要なのかという観点で見直してみる。

(3) 合同条件の検証

三角形には角と辺がそれぞれ3つずつ、計6つの情報がある。まず、1つの情報だけでも2つの情報だけでも合同な三角形が作図できないことは容易にわかる。そこで3つの情報での作図を検討する。小6で「順列・組合せ」を学習しており、異なる6つの情報から3つの情報を選ぶというのは「組合せ」の考え方をを使うことによって20通りであるとわかる¹⁵⁾。図22の△ABCを基にして、∠A、∠B、∠C、辺a、辺b、辺cから3つ選んだ20通りを一覧表にすると図23のようになる。●印は選択した情報を表し、図17図18図19で確認した合同条件「二角夾辺」「二辺夾角」「三辺」に該当する7通りのケースは色分けしてある。

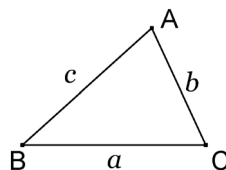


図22 △ABC

ここで合同条件が空欄になっている残りの13ケースを検証してみる。「三角形の内角の和は180°である」ことを既習とすれば、わかっている二角から残りの一角を算出することができるので、②③⑤⑦⑩⑬の6ケースは「二角夾辺」の合同条

	$\angle A$	$\angle B$	$\angle C$	辺 a	辺 b	辺 c	合同条件
①	●	●	●				
②	●	●		●			
③	●	●			●		
④	●	●				●	二角夾辺
⑤	●		●	●			
⑥	●		●		●		二角夾辺
⑦	●		●			●	
⑧	●			●	●		
⑨	●			●		●	
⑩	●				●	●	二辺夾角
⑪		●	●	●			二角夾辺
⑫		●	●		●		
⑬		●	●			●	
⑭		●		●	●		
⑮		●		●		●	二辺夾角
⑯		●			●	●	
⑰			●	●	●		二辺夾角
⑱			●	●		●	
⑲			●		●	●	
⑳				●	●	●	三辺

図23 三角形の合同を検証するための一覧表その1

件に帰着させることができる。図24はこれらの合同条件の欄を埋めたものである。△印は算出した一角を表している。

	$\angle A$	$\angle B$	$\angle C$	辺 a	辺 b	辺 c	合同条件
①	●	●	●				
②	●	●	△	●			(二角夾辺)
③	●	●	△		●		(二角夾辺)
④	●	●				●	二角夾辺
⑤	●	△	●	●			(二角夾辺)
⑥	●		●		●		二角夾辺
⑦	●	△	●			●	(二角夾辺)
⑧	●			●	●		
⑨	●			●		●	
⑩	●				●	●	二辺夾角
⑪		●	●	●			二角夾辺
⑫	△	●	●		●		(二角夾辺)
⑬	△	●	●			●	(二角夾辺)
⑭		●		●	●		
⑮		●		●		●	二辺夾角
⑯		●			●	●	
⑰			●	●	●		二辺夾角
⑱			●	●		●	
⑲			●		●	●	
⑳				●	●	●	三辺

図24 三角形の合同を検証するための一覧表その2

図24の一覧表において合同条件の欄が空白なのは7ケースであるが、三角がわかっているだけの①のケースでは、相似な三角形はかけても合同な三角形を作図することはできないことが容易にわかる。残りは⑧⑨⑭⑯⑱の6ケースであるが、すべて「二辺とその間にない一角」がわかっている場合になる。そこでこれらのケースで合同な三角形が作図できるかどうかを検証してみる。

(4) 図形ソフトの活用

実際に定規とコンパスを使った作図は手間と時間がかかるが、図形ソフトを使うと作図が簡単に短時間ででき、様々なシミュレートによる検証などもしやすくなる。ここでは図15の三角形を基に、⑧⑨⑭⑯⑱の「二辺とその間にない一角」がわかっている6ケースにおいて、図形ソフトを活用して合同な三角形の作図を試みる。

図25は⑧の $\angle A$ と辺 AC 、 CB がわかっている場合であるが、この場合は頂点 B が1つに定まり三角形が決定される。図26は⑨の $\angle A$ と辺 AB 、 BC がわかっている場合であるが、この場合も頂点 C が1つに定まり三角形が決定される。

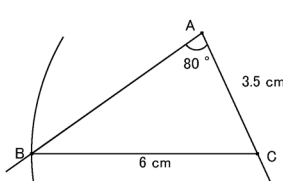


図25 ⑧の場合

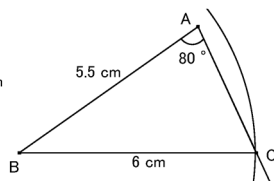


図26 ⑨の場合

図27は⑭の $\angle B$ と辺 BC 、 CA がわかっている場合であるが、頂点 A は1つに定まらない。図28は⑯の $\angle B$ と辺 BA 、 AC がわかっている場合であるが、この場合も頂点 C は1つに定まらない。

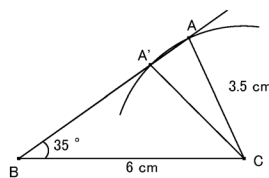


図27 ⑭の場合

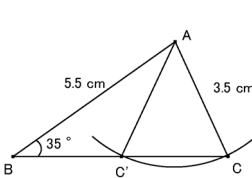


図28 ⑯の場合

図29は⑮の $\angle C$ と辺CB、BAがわかっている場合であるが、頂点Aは1つに定まらない。図21はまさにこの⑮のケースが取り上げられていたのである。図30は⑯の $\angle C$ と辺CA、ABがわかっている場合であるが、この場合は頂点Bが1つに定まり三角形が決定される。

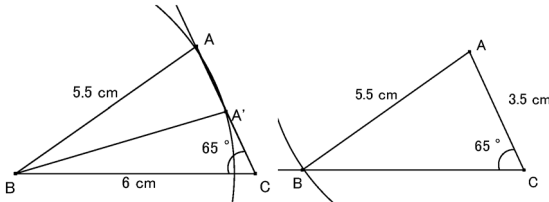


図29 ⑮の場合

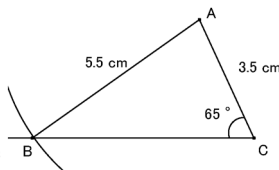


図30 ⑯の場合

これらのことから、「二辺とその間にない一角」がわかっている場合においては、合同な三角形が定まる場合と定まらない場合があることが帰納的に確認できた。では、一般的にどのような場合に定まり、どのような場合に定まらないのであろうか。ここでは図形ソフトを使って、角の大きさや辺の長さを変化させたり、トレース機能によって辺の長さの変化を軌跡として残したりして、その様子を視覚的に考察してみる。

まず、わかっている「二辺とその間にない一角」を、図22の $\triangle ABC$ における辺 a 辺 c $\angle C$ と想定する。最初に辺 a の長さを決めておき、 $\angle C$ の大きさと辺 c の長さを変化させて、そのときにできる三角形の様子を考察する。 $\angle C$ の大きさは図31図32図33のように鋭角か直角か鈍角の場合が考えられ、辺 c の長さは辺 a より短いとか長い場合がありそれぞれ図34図35図36の円弧上に辺 c の端点Aがあると考えることができる。

図31のように $\angle C$ を鋭角とし、辺 c の長さを図34図35図36のように変化させたときに頂点Aが

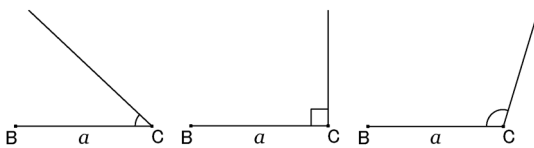


図31 鋭角

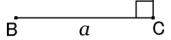


図32 直角

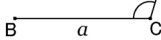
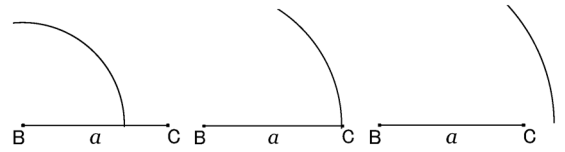
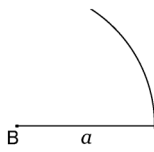
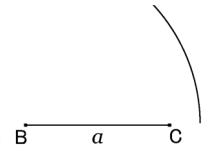


図33 鈍角

図34 $c < a$ 図35 $c = a$ 図36 $c > a$

どのように定まるかを示したのが図37である¹⁶⁾。図37から辺 c の長さが辺 a より短いときには頂点Aが2つになってしまうが、辺 a 以上のときには頂点Aは1つに定まることがわかる。図形ソフトのトレース機能を使って、頂点Aが2つできる場合の線分AB (辺 c)の軌跡を残すように設定しておいて、円の大きさを変えて辺 c の長さを連続的に変化させたときの結果が図38である。塗りつぶされた部分は軌跡によるものであり、頂点Aが2つできる場合における線分AB (辺 c)の存在範囲を示している。

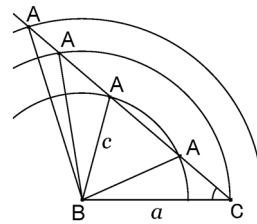


図37 鋭角の場合

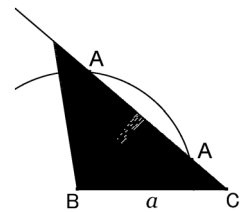


図38 線分ABの軌跡

この図38から、辺 c の長さの範囲が、 $\angle C$ をつくる半直線に点Bから下ろした垂線の長さよりも長く、辺 a の長さよりも短いときは、円と半直線は2点で交わってしまい、頂点Aが1つに定まらないことがわかる¹⁷⁾。辺 c の長さが、辺 a 以上に長いときは頂点Aは1つに定まり三角形が決定できる。

同様に、 $\angle C$ が直角や鈍角のときの辺 c の長さとの関係を示したのが図39図40である。

図39図40から、 $\angle C$ が直角や鈍角のとき、三角形ができるのは辺 c が辺 a よりも長いときのみであり、このとき頂点Aは1つに定まり三角形が決定できることがわかる¹⁸⁾。

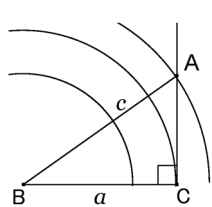


図39 直角の場合

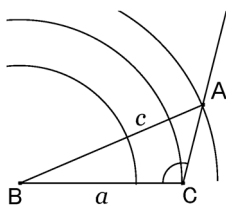


図40 鈍角の場合

(5) 「二辺とその間にない一角」

「二辺とその間にない一角」という条件では、図37のように、 $\angle C$ が鋭角のときは頂点Aが定まらず2つの三角形ができてしまう場合があることを確認したが、これは辺 a 辺 c $\angle C$ の位置関係が特定されている、つまり $\angle C$ に接している辺が辺 a で $\angle C$ の対辺が辺 c というように位置関係がわかっている場合のことである。例えば、5.5 cm、6 cm、 65° という情報が与えられただけだったとしたら、5.5 cmと6 cmのどちらが一角と接する辺で、どちらが対辺なのかわからないので、辺と角の関係が特定できず、この条件を満たす三角形は図41のように右端のケースも加わり3つのパターンになってしまう。このように、「二辺とその間にない一角」は一般的に成り立つ三角形の合同条件とはなり得ない。

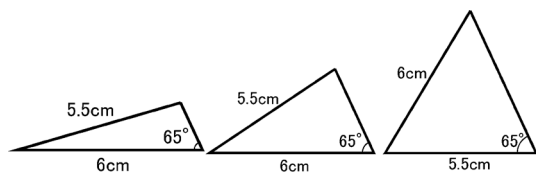


図41 「二辺とその間にない一角」による三角形

ただし図37図39図40で考察したように、条件付きということであれば、「二辺とその間にない一角」も合同条件になり得る。つまり、

〔条件Ⅰ〕一角が鋭角で角に接する辺以上に対辺の方が長い場合

〔条件Ⅱ〕一角が直角の場合

〔条件Ⅲ〕一角が鈍角の場合

これらのどれかが条件として認められるならば三角形は定まるので、このとき「二辺とその間にない一角」は合同条件として成り立つ¹⁹⁾。

(6) 「二角とその間にない一辺」

図24の一覧表における角と辺の情報は、どの角や辺なのかを特定しているので、②③⑤⑦⑫⑬のような「二角とその間にない一辺」の6ケースでも、「三角形の内角の和」を用いて残りの一角を算出し、合同条件「二角夾辺」に絞り込むことができた。しかし、二角と一辺がどの角や辺なのかわからない場合、つまり特定されていない場合は絞り込むことができない。例えば、 35° 、 80° 、6 cmが「二角とその間にない一辺」だったとすると、この条件を満たす三角形は図42に示したような2つのパターンが考えられ定まらない。このように、「二角とその間にない一辺」も一般的に成り立つ三角形の合同条件とはなり得ない²⁰⁾。

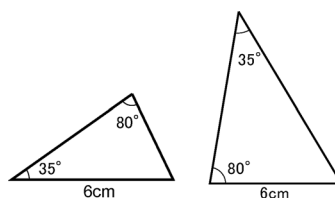


図42 「二角とその間にない一辺」による三角形

ただし条件付きということであれば、「二角とその間にない一辺」も合同条件になり得る。つまり、

〔条件〕一辺に向かい合った角がどちらの角なのか特定されている場合

これが条件として認められるならば「三角形の内角の和」を用いて三角形は定まるので、このとき「二角とその間にない一辺」は合同条件として成り立つ。

(7) 直角三角形の合同条件

中2で学ぶ直角三角形の合同条件では、既習の「三角形の合同条件」の他に、図43のように2つの合同条件を加えている。

図43にある[1]の合同条件「直角三角形の斜辺と1つの鋭角がそれぞれ等しい」は、直角と1つの鋭角と斜辺、つまり「二角とその間にない一辺」がわかっている場合であると言える。「二角とその間にない一辺」は一般的に成り立つ三角形の合

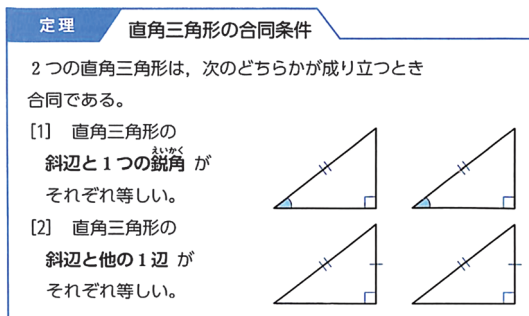


図43 数学教科書（数研出版2021年度版）中2 p. 147

同条件とはなり得なかった。しかし例えば二角のうち一辺に向かい合った角がどちらの角なのか特定できる場合は、この条件付きで合同条件として成り立った。直角と鋭角のうち斜辺に向かい合った角が直角であるので、図43の[1]はまさにこの条件付き合同条件に合致している場合であると言える²¹⁾。

図43にある[2]の合同条件「直角三角形の斜辺と他の1辺がそれぞれ等しい」は、斜辺と他の1辺と直角、つまり「二辺とその間にない一角」がわかっている場合であると言える。「二辺とその間にない一角」は一般的に成り立つ三角形の合同条件とはなり得なかった。しかし一角が直角の場合は、この条件付きで合同条件として成り立った。直角三角形はわかっている一角が直角であるので、図43の[2]はまさにこの条件付き合同条件に合致している場合であると言える²²⁾²³⁾。

このように「二角とその間にない一辺」「二辺とその間にない一角」との関係を基に見直すことによって、一般的には合同条件として成り立たないケースが、直角三角形においては特定の条件が揃ったことによりまさに条件付き合同条件として成り立ったのだということがわかる。このように捉えると、図43の[1][2]は直角三角形ならではの特筆すべき合同条件として加えられているのだということが理解できる。

5. 得られた知見

本稿では見直し教材として、「三角形・四角形

の内角の和」「平行四辺形の性質」「三角形の合同条件」などを取り上げ、振り返り見直すことによって、教材の内容の理解をより深めることができ、帰納と演繹、特殊と一般、定義と性質の関係などをより深く捉え直すことができることを明らかにした。その過程で次のような知見を得ることができた。

i) 小学校では帰納と演繹を数学的手法として捉えさせることはしていないが、「三角形・四角形の内角の和」を見直し教材として、小学校と中学校での教材を比較したり扱い方を分析したりすることによって、帰納と演繹を数学的手法として捉え、その違いをより深く理解することができ、帰納と演繹を思考の手段として捉え直すことができる。

ii) 小学校での教材「四角形の内角の和」を見直すことによって、特殊と一般の関係で証明を関連付けて捉え直すことができ、中学校の教材「三角形の内角の和」を見直すことによって、この特殊と一般の関係に着目する方法は、多様な証明を見出す手法としても有効であることが確認できる。

iii) 「平行四辺形の性質」「平行の定義」を見直し教材として小学校と中学校での扱い方を比較することによって、性質は定義から導かれるという認識をより深めることができ、定義の仕方も変えることができるのだということがわかる。

iv) 三角比表を学習して、小5において作図する三角形を見直すと、辺の長さや角の大きさは、児童が扱いやすいように誤差を丸めた数値になっていることがわかる。

v) 小学校の教材「三角形の合同条件」においては、合同な三角形を合理的に作図するためにどのような情報が必要なのかという観点で見直すことができる。一覧表でのチェックを通して、「二辺夾角」「二角夾辺」「三辺」の他に「二辺とその間にない一角」と「二角とその間にない一辺」も条件付きで三角形の合同条件になることがわかる。またこのことと関連付けることによって、中学校での教材「直角三角形の合同条件」に関しても理解をより深めることができる。

vi) 図形ソフトの活用は、任意の点や直線を動かしたり、軌跡を残したりできるので、「三角形・四角形の内角の和」「三角形の合同条件」を見直すときに、特殊と一般の関係や線分の存在範囲を視覚的に捉える上で大変有効である。

今後も、子どもの成長に伴って理解の深化が起こることを念頭に置きながら、算数・数学の見直し教材の開発を行っていきたいと考えている。

註

- 1) 小4の「平行線の作図」、小6の「分数の割算」を見直し教材とすることで得られる知見に関しては、中込・黒木（2021、2024）において示した。
- 2) 帰納と演繹に関しては、中学校学習指導要領解説数学編（文部科学省 2017 年告示）p.35 において次のように記述されている。「帰納は、特別な場合についての観察や操作、実験などの活動に基づいて、それらを含んだより一般的な結果を導き出す推論である。」「演繹は、前提となる命題から論理の規則に従って結論となる命題を導き出す推論である。」
- 3) 特殊と一般の関係を捉えるのに図形ソフトは大変有効である。図形ソフトを活用すると、図 6 右図 9 図 10 にある任意の点や平行線を動的に捉えてその変化の様子を視覚的に確認することができる。使用した図形ソフトは、カブリログ社（フランス）により製作された幾何ソフト「Cabri II Plus」である。日本では Naoco Inc.（株式会社ナオコ）が輸入・販売を行っている。
- 4) 平行四辺形の定義と性質については、小学校学習指導要領解説算数編（文部科学省 2017 年告示）p.203、教科書では例えば算数教科書（教育出版 2020 年度版）小4上 p.121、p.122、p.128 などに掲載されている。
- 5) 中学校では、このあと図 44 のように、定義とこれら 3 つの性質にさらに「1 組の対辺が平行で長さが等しい」を加えたものを「平行四辺形になるための条件」としてまとめている。

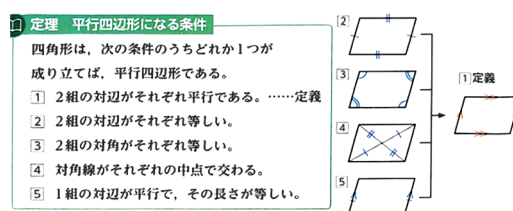
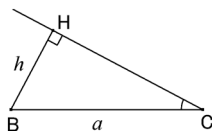


図 44 数学教科書（日本文教 2021 年度版）中 2 p. 150

- 6) 算数教科書（学校図書 2020 年度版）小4上 p.79
- 7) 数学教科書（数研出版 2021 年度版）中2 p.161
- 8) 「①同位角が等しい 2 直線」とは、「方向が同じ 2 直線」のことである。
- 9) 小学校での平行の定義に関しては、小学校学習指導要領解説算数編（文部科学省 2017 年告示）p.202 に次のような記述がある。「2 本の直線の平行については、『二つの直線がどこまでいっても交わらないとき、この二つの直線は平行である』と約束することができる。しかし『どこまでいっても』という表現では、実際に操作で確かめることができない。そこで、はじめに垂直の関係について約束し、その上で、平行の関係について約束する。」
- 10) 定義を定めて証明によって性質を見出すという活動は、まさに数学をつくる活動であると言える。
- 11) 三角比表から、きれいな数値になるのは正弦の 30° 、余弦の 60° 、正接の 45° などに限られることがわかる。
- 12) 図形ソフトで精度を高めて小数第四位まで表示させると、例えば $\angle C$ は 64.6232° となる。
- 13) 誤差に気づくということは、成長に伴う理解の深化であると言える。教師も算数教材をこうした観点で見直しておくと、図 15 のような三角形の辺の長さや角の大きさの値は誤差を含んだものであるという認識をもつことができ、作図作業時に誤差が出ても適切に指導することができる。そうした意味では、こうした算数教材の見直しは教員養成の立場からも学生に身に付けさせたい数学的素養の育成につながるかと捉えている。
- 14) 小学校では合同な三角形のかき方を考え、理解し、実際にかくことに重点が置かれており、合同条件における合理性を追究するような扱いにはなっていない。

- 15) 高校数学を既習とすると、 ${}_6C_3 = (6 \cdot 5 \cdot 4) / (3 \cdot 2 \cdot 1) = 20$ として算出できる。
- 16) 1つの角のパターンに対して3つの辺のパターンの対応が考えられる。(図31と図34図35図36、図32と図34図35図36、図33と図34図35図36)
- 17) 図45のように、点Bから点Cを通る半直線に下ろした垂線の長さを h とすると、 $h < c < a$ のとき頂点Aは定まらない。 $(c < h$ のときは三角形が存在しない。)

図45 $h < c < a$

- 18) 図39図40において、 $c \leq a$ のときは三角形が存在しない。
- 19) 一角が鋭角の場合、例えば図45において $c = h$ のときも三角形は定まるので、厳密に言えばこの場合も条件に含めることになる。
- 20) 中学校の教科書では、図46のように一辺と二角では三角形が定まらないことに触れている。

「1辺が4.5 cmで2つの角が 60° と 40° の三角形」をかいてみましょう。

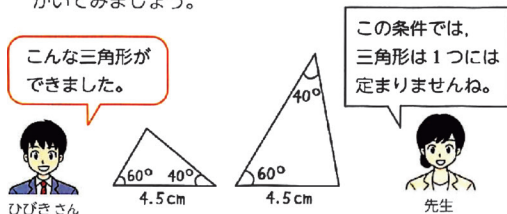


図46 数学教科書(数研出版2021年度版)中2 p. 126

- 21) 「(6)二角とその間にない一辺」の節で示した「二角とその間にない一辺」が合同条件として成り立つときの[条件]に該当する。
- 22) 「(5)二辺とその間にない一角」の節で示した「二辺とその間にない一角」が合同条件として成り立つときの[条件II]に該当する。
- 23) 図43の「[2]直角三角形の斜辺と他の1辺がそれぞれ等しい」が合同条件として成り立つことに関して

は、図47のように、「二等辺三角形の2つの底角は等しい」と図43の[1]を用いた証明も紹介されている。

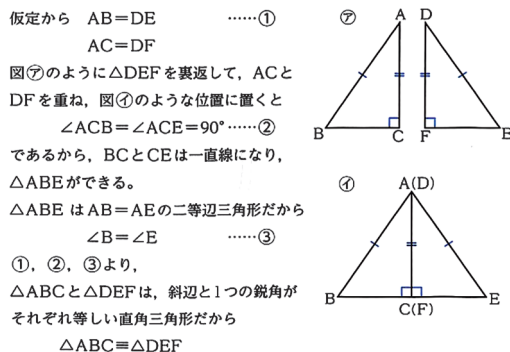


図47 数学教科書(日本文教2021年度版)中2 p. 143

参考文献

- 黒木伸明、教員養成の立場から見た小学校教師の数学的リテラシー、日本数学教育学会誌 76-12、pp.2-7、1994 年
- 中込雄治、多様な考え方を引き出す数学教材の開発に関する研究、日本数学教育学会誌数学教育論究 Vol86、pp.43-49、2005 年
- 中込雄治・黒木伸明・千田真佑子、算数・数学教育におけるテクノロジーの活用場面について、宮城学院女子大学発達科学研究 No.20、pp.7-18、2020 年
- 中込雄治・黒木伸明、算数・数学における教材の発展的な扱いについて—平行線の作図を例に一、宮城学院女子大学発達科学研究 No.21、pp.11-21、2021 年
- 中込雄治・黒木伸明、学習段階に応じた算数教材の発展的な扱いについて—分数の割算を例に一、宮城学院女子大学発達科学研究 No.24、pp.43-52、2024 年
- 赤川峰大・岡部恭幸、理由を説明することに関わる小学生の実態—第5学年図形の内角の和に焦点を当てて—、数学教育学会 Vol.65/No.1・2、pp.25-38、2024 年
- 赤川峰大、小学校算数科における演繹的な説明についての研究、日本数学教育学会誌 106-12、pp.2-11、2024 年