宮城学院女子大学発達科学研究
2020. 20. 7-18

算数・数学教育におけるテクノロジーの活用場面について

中　込　雄　治[1]
黒　木　伸　明[2]
千　田　真佑子[3]

算数・数学教育におけるテクノロジーの活用、特に図形ソフトと電卓の活用場面について考察した。教師による教材研究における活用場面として、図形ソフトの作図機能に着目し、正多角形の作図を教材化する上での効用を検討した。また、子どもの思考を深める活用場面として、図形ソフトで培った動的なイメージを用いると、証明問題などで補助線を見出す際に有効に作用することを明らかにした。電卓の活用では、子どもの知的関心にもとづいた活用場面を考察した。

Keywords：図形ソフトの活用、正多角形の作図、補助線の見出し方、電卓の活用

1. はじめに

1980年代半ばに家庭用パソコンが普及し始めて以来、様々な情報端末機器やアプリケーションソフトが登場し、現在では電子黒板やデジタル教科書など、テクノロジーの利用環境が大きく変化した。本稿では算数・数学教育におけるテクノロジーの活用場面を考える。特に図形ソフトの活用場面と電卓の活用場面について考察する（註1）。

まず、教師による教材研究における活用場面として、図形ソフトの作図機能を活かして、「正n角形から正$2n$角形を作図する」という題材の教材化を図る上での効用について検討する。続いて、子どもが思考を深める上での活用場面として、図形ソフトにおける点や直線を動かしたときの様子が確認できる機能を活かして、特に証明問題における補助線の見出し方に着目し、複数の解法を特殊と一般の関係で関連付ける際の効果について明らかにする。最後に、子どもの「自主勉強ノート」にあった内容をもとに、知的関心にもとづいた電卓の活用場面について考察する。

1. 宮城学院女子大学教育学部
2. 上越教育大学名誉教授
3. 横須賀市立大塚台小学校

2. 図形ソフトの作図機能

「垂線」や「角の二等分線」などの基本的な作図を実際に手作業で行い、定規とコンパスの扱いに習熟しておくことは大切である。しかし実際の作図の手作業は手間がかかるので、教材研究などで作図を用いてさらに別の目的を追究しようとする場合には、図形ソフトの作図機能が大いに役立つ。作図に手間取ることかないので，作図結果をすぐチェックでき、思考が途切れないのが大きな利点である。また、綺麗に表現できるので、作図の細部がわかりやすく、その作図結果をもとにした分析や考察が行いやすくなる。

ここでは「正n角形から正$2n$角形を作図する」という題材の教材化を取り上げ、円に内接する正多角形の作図を考える。図形ソフトの作図機能を使い，作図結果を確認しながら作図方法の分析と考察を行い、作図機能の効用を検討する。

例えば、図2-1のような円に内接する正三角形があるとき、弧AB，BC，CAの中点をとることができれば、それらを結んで図2-2のような正六角形を作図することができる。さらに、図2-2において弧AF, FB, BD, DC, CE, EAの中点をとることができれば、正十二角形を作図することができる。

［正三角形→正六角形→正十二角形］

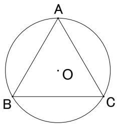

図2-1

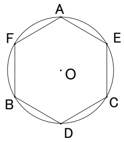

図2-2

正方形や正五角形においても同様に考えると、次のような作図の流れが考えられる。

［正方形→正八角形→正十六角形］

［正五角形→正十角形→正二十角形］

つまり正n角形をもとにして正$2n$角形を作図することができる。そこで、弧の中点をとる多様な作図方法を考え、図形ソフトを使って作図結果を確認しながら、その方法を分析・考察してみる。

弧の中点をとる作図における多様な方法は、円の中心を使う場合と、円の中心を使わない場合に分け、正三角形・正方形・正五角形において検討する。なお、並べて示した作図の左側は正n角形、右側は正$2n$角形である。

〈中心を使う場合〉

【①頂点と円の中心を結ぶ】

はじめに2点を結ぶ方法を考えてみる。正三角形と正五角形において、頂点と円の中心を結ぶ次のような方法が考えられる。

【方法①三】頂点Aと円の中心Oを結ぶ（註2）。

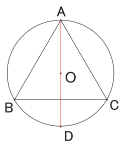

図2-3

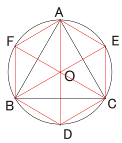

図2-4

【方法①五】頂点Aと円の中心Oを結ぶ。

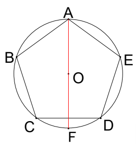

図2-5

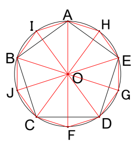

図2-6

作図結果から、これは一般に正（奇数）角形において成り立つことがわかる。

【②円の中心と辺の中点を結ぶ】

辺は弦になっているので、円の中心と辺の中点を結ぶ次のような方法も見出される。

【方法②三】中心Oと辺BCの中点Mを結ぶ。

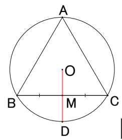

図2-7

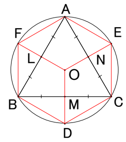

図2-8

【方法②四】中心Oと辺BCの中点Mを結ぶ。

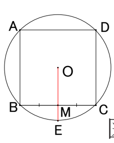

図2-9

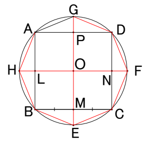

図2-10

【方法②五】中心Oと辺CDの中点Mを結ぶ。

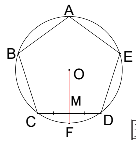

図2-11

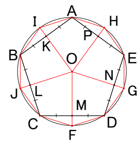

図2-12

作図結果から、これは一般に正n角形（$n≧3$）すべてにおいて成り立つ方法であることがわかる。

【③円の中心から辺に垂線を引く】

辺を弦と捉えると、円の中心から辺に垂線を引く次のような方法も見出される。

【方法③三】中心Oから辺BCに垂線を引く。

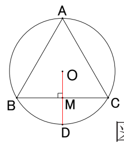

図2-13

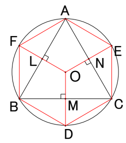

図2-14

【方法③四】中心Oから辺BCに垂線を引く。

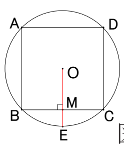

図2-15

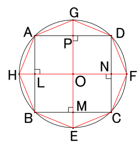

図2-16

【方法③五】中心Oから辺CDに垂線を引く。

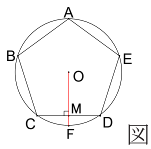

図2-17

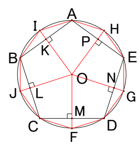

図2-18

作図結果から、これは一般に正n角形（$n≧3$）すべてにおいて成り立つ方法であることがわかる。

【④中心角の二等分線を引く】

角の二等分線を用いるとすれば、中心角に着目した次のような方法が考えられる。

【方法④三】∠BOCの二等分線を引く。

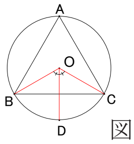

図2-19

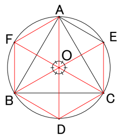

図2-20

【方法④四】∠BOCの二等分線を引く。

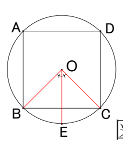

図2-21

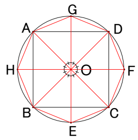

図2-22

【方法④五】∠CODの二等分線を引く。

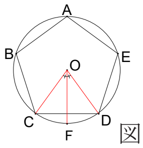

図2-23

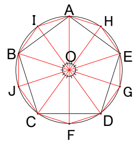

図2-24

作図結果から、これは一般に正n角形（n≧3）すべてにおいて成り立つ方法であることがわかる。

【⑤円の中心と2辺の延長線の交点を結ぶ】

2点を結ぶ方法が簡単なので、他にないか考えてみる。正五角形ならば、円の中心と2辺の延長線の交点を結ぶ次のような方法が見出される。

【方法⑤五】中心Oと直線BC, EDの交点Pを結ぶ。

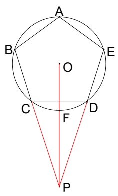

図2-25

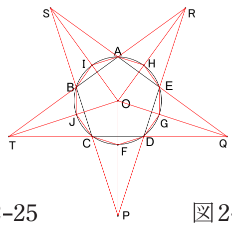

図2-26

作図結果から、これは一般にn≧5の正n角形すべてにおいて成り立つ方法であることがわかる。

〈中心を使わない場合〉

【⑥円周角の二等分線を引く】

角の二等分線を用いるとすれば、正三角形と正五角形において、円周角に着目した次のような方法が考えられる。

【方法⑥三】∠BACの二等分線を引く。

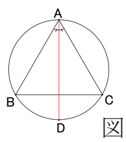

図2-27

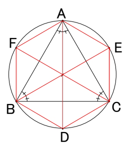

図2-28

【方法⑥五】∠BAEの二等分線を引く（註3)。

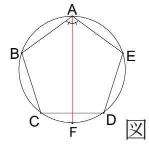

図2-29

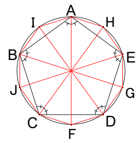

図2-30

作図結果から、これは一般に正（奇数）角形において成り立つことがわかる。

【⑦頂点と辺の中点を結ぶ】

辺を弦と捉えると、正三角形と正五角形において、頂点と辺の中点を結ぶ次のような方法も見出される。

【方法⑦三】点Aと辺BCの中点Mを結ぶ。

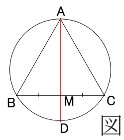

図2-31

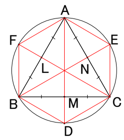

図2-32

【方法⑦五】点Aと辺CDの中点Mを結ぶ。

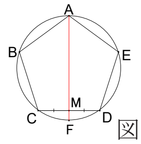

図2-33

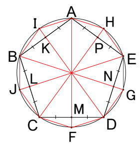

図2-34

作図結果から、これは一般に正（奇数）角形において成り立つことがわかる。

【⑧頂点から辺に垂線を引く】

辺を弦と捉えると、正三角形と正五角形において、頂点から辺に垂線を引く次のような方法も見出される。

【方法⑧三】点Aから辺BCに垂線を引く。

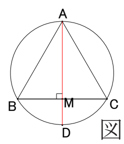

図2-35

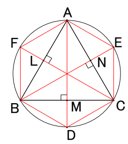

図2-36

【方法⑧五】点Aから辺CDに垂線を引く。

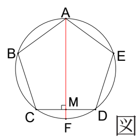

図2-37

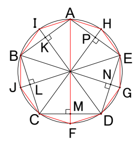

図2-38

作図結果から、これは一般に正（奇数）角形において成り立つことがわかる。

【⑨辺の垂直二等分線を引く】

辺を弦と捉えると、辺の垂直二等分線による次のような方法が考えられる。

【方法⑨三】辺BCの垂直二等分線を引く。

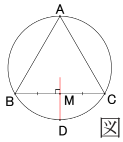

図2-39

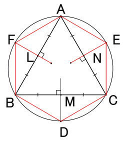

図2-40

【方法⑨四】辺BCの垂直二等分線を引く。

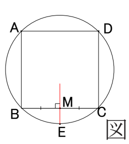

図2-41

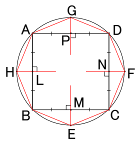

図2-42

【方法⑨五】辺CDの垂直二等分線を引く。

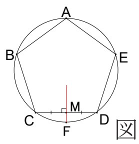

図2-43

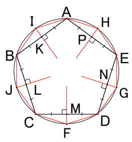

図2-44

作図結果から、これは一般に正n角形（$n \geqq 3$）すべてにおいて成り立つ方法であることがわかる。

【⑩向かい合う辺の中点どうしを結ぶ】

正方形であれば、向かう合う辺の中点どうしを結ぶ次のような方法も考えられる。

【方法⑩四】辺AD, BCの中点N, Mを結ぶ。

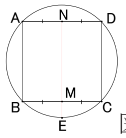

図2-45

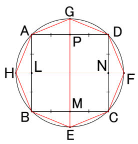

図2-46

作図結果から、これは一般に正（偶数）角形において成り立つことがわかる。

【⑪頂点と2辺の延長線の交点を結ぶ】

2点を結ぶ方法が簡単なので、ここでも他にないか考えてみる。正五角形ならば、頂点と2辺の延長線の交点を結ぶ、次のような方法が見出される。

【方法⑪五】頂点Aと直線BC, EDの交点Pを結ぶ。

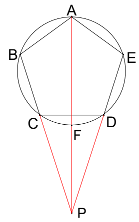

図2-47

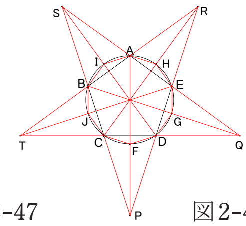

図2-48

作図結果から、これは一般に正（奇数）角形において成り立つことがわかる。

【⑫2辺の延長線が作る角の二等分線を引く】

2辺の延長線が作る角に着目すれば、角の二等分線を用いた次のような方法が見出される。

【方法⑫五】直線BC, EDの交点をPとし、∠CPDの二等分線を引く。

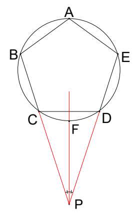

図2-49

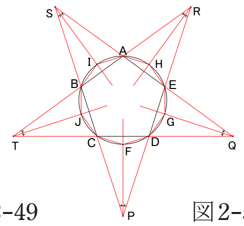

図2-50

作図結果から、これは一般に$n \geqq 5$の正n角形すべてにおいて成り立つ方法であることがわかる。

【⑬辺の中点と2辺の延長線の交点を結ぶ】

さらに、辺の中点と2辺の延長線の交点を結ぶ次のような方法が見出される。

【方法⑬五】辺CDの中点Mと直線BC, EDの交点Pを結ぶ。

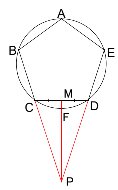

図2-51

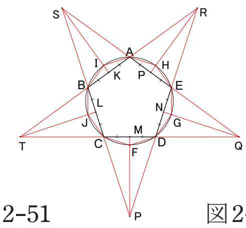

図2-52

作図結果から、これは一般に$n \geqq 5$の正n角形すべてにおいて成り立つ方法であることがわかる。

【⑭2辺の延長線の交点どうしを結ぶ】

また、一般に正n角形でnが6以上の偶数であるときに、次のような方法も考えられる。正六角形の場合で示す。

【方法⑭六】直線BA，EFの交点Pと直線BC，EDの交点Qを結ぶ。

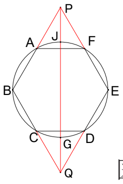

図2-53

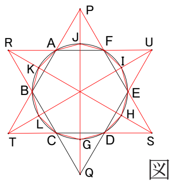

図2-54

この場合は、他にも例えば対角線AD，CFの交点として円の中心を求めることもできるので、【⑤円の中心と2辺の延長線の交点を結ぶ】の方法に帰着させることもできる。

【⑮対称性を利用して2点を結ぶ】

その他にも、対称性を活かした次のような方法などが考えられる。

【方法⑮五】頂点Aと対角線BD，ECとの交点Pを結ぶ。

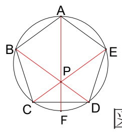

図2-55

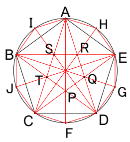

図2-56

【方法⑮六】対角線AE，BFの交点Pと対角線BD，CEの交点Qを結ぶ。

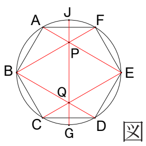

図2-57

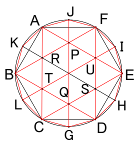

図2-58

作図結果から、これは一般に$n \geqq 5$の正n角形すべてにおいて成り立つ方法であることがわかる。

以上のように、ここでは正三角形・正方形（正四角形）・正五角形などから、実際に正$2n$角形を図形ソフトで作図しながら、作図方法①～⑮の検討を行った。それらの関係をまとめて一覧表にすると、表１のようになる。○は作図可能、×は作図不可を表している。

さらに、検討から得られた知見をもとに、正六角形・正八角形・正十角形から正$2n$角形の作図を考えいくと、その場合の作図方法①～⑮との関係は、表２のようになる。

また、作図方法①～⑮の作図において具体的に使用した方法をまとめて一覧表にすると、表３のようになる。

表１

正n角形から 正$2n$角形 / 弧の中点の取り方	正三角形 ↓ 正六角形	正四角形 ↓ 正八角形	正五角形 ↓ 正十角形
① 頂点と円の中心を結ぶ	○	×	○
② 円の中心と辺の中点を結ぶ	○	○	○
③ 円の中心から辺に垂線を引く	○	○	○
④ 中心角の二等分線を引く	○	○	○
⑤ 円の中心と２辺の延長線の交点を結ぶ	×	×	○
⑥ 円周角の二等分線を引く	○	×	○
⑦ 頂点と辺の中点を結ぶ	○	×	○
⑧ 頂点から辺に垂線を引く	○	×	○
⑨ 辺の垂直二等分線を引く	○	○	○
⑩ 向かい合う辺の中点どうしを結ぶ	×	○	×
⑪ 頂点と２辺の延長線の交点を結ぶ	×	×	○
⑫ ２辺の延長線が作る角の二等分線を引く	×	×	○
⑬ 辺の中点と２辺の延長線の交点を結ぶ	×	×	○
⑭ ２辺の延長線の交点どうしを結ぶ	×	×	×
⑮ 対称性を利用して２点を結ぶ	×	×	○

表２

正n角形から 正$2n$角形 / 弧の中点の取り方	正六角形 ↓ 正12角形	正八角形 ↓ 正16角形	正十角形 ↓ 正20角形
① 頂点と円の中心を結ぶ	×	×	×
② 円の中心と辺の中点を結ぶ	○	○	○
③ 円の中心から辺に垂線を引く	○	○	○
④ 中心角の二等分線を引く	○	○	○
⑤ 円の中心と２辺の延長線の交点を結ぶ	○	○	○
⑥ 円周角の二等分線を引く	×	×	×
⑦ 頂点と辺の中点を結ぶ	×	×	×
⑧ 頂点から辺に垂線を引く	×	×	×
⑨ 辺の垂直二等分線を引く	○	○	○
⑩ 向かい合う辺の中点どうしを結ぶ	○	○	○
⑪ 頂点と２辺の延長線の交点を結ぶ	×	×	×
⑫ ２辺の延長線が作る角の二等分線を引く	○	○	○
⑬ 辺の中点と２辺の延長線の交点を結ぶ	○	○	○
⑭ ２辺の延長線の交点どうしを結ぶ	○	○	○
⑮ 対称性を利用して２点を結ぶ	○	○	○

表３

弧の中点の取り方	方法
① 頂点と円の中心を結ぶ	２点を結ぶ
② 円の中心と辺の中点を結ぶ	２点を結ぶ，中点をとる
③ 円の中心から辺に垂線を引く	垂線を引く
④ 中心角の二等分線を引く	角の二等分線を引く
⑤ 円の中心と２辺の延長線の交点を結ぶ	２点を結ぶ
⑥ 円周角の二等分線を引く	角の二等分線を引く
⑦ 頂点と辺の中点を結ぶ	２を結ぶ，中点をとる
⑧ 頂点から辺に垂線を引く	垂線を引く
⑨ 辺の垂直二等分線を引く	垂直二等分線を引く
⑩ 向かい合う辺の中点どうしを結ぶ	２点を結ぶ，中点をとる
⑪ 頂点と２辺の延長線の交点を結ぶ	２点を結ぶ
⑫ ２辺の延長線が作る角の二等分線を引く	角の二等分線を引く
⑬ 辺の中点と２辺の延長線の交点を結ぶ	２点を結ぶ，中点をとる
⑭ ２辺の延長線の交点どうしを結ぶ	２点を結ぶ
⑮ 対称性を利用して２点を結ぶ	２点を結ぶ

このような表１～３の表は、「正n角形から正$2n$角形を作図する」という題材の教材化を図る上で、有効に活用できる。例えば、「角の二等分線の作図」を使わせようとするとき、表1、2か

ら［正三角形→正六角形］では④⑥、［正四角形→正八角形］では④、［正五角形→正十角形］では④⑥⑫の作図方法が活用できることがわかる。あるいは、［正三角形→正六角形→正12角形］の作図を題材にしようとするならば、表1、2、3から子どもがどのような作図方法を考えるか予測でき、既習事項との関連なども考察できる。

また、実際には「2点を結ぶ」という作図方法が一番簡単であるということが、図形ソフトでの作図作業からもわかる。そこで、小学校ならば、この「2点を結ぶ」という作図方法を中心にした題材が検討できる。表3から方法①②⑤⑦⑩⑪⑬⑭⑮が候補になるが、②⑦⑩⑬は「中点をとる」作業が必要になる。中点の作図方法はいろいろ考えられるが一般には中学校で学ぶ「垂直二等分線の作図」が用いられるので、それらを省くと方法①⑤⑪⑭⑮が残る（註4）。これらをもとに［正三角形→正六角形→正12角形］の作図を考えてみると、［正三角形→正六角形］においては表1から方法①、［正六角形→正12角形］においては表2から方法⑤⑭⑮を活用することができるとわかる。この知見をもとに、さらに正24角形までの作図結果を図形ソフトで確認しておき、［正三角形→正六角形→正12角形→正24角形］の作図を題材とする見通しを立てて、実際に定規を使った手作業での作図を試みた。図2–59の円に内接する正三角形をもとにして、方法①の後、方法⑭を繰り返し用いて手作業で作成した正24角形が図2–60である。このことから、この作図方法なら教材化できることがわかった。

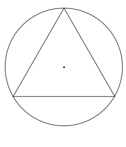

図2–59

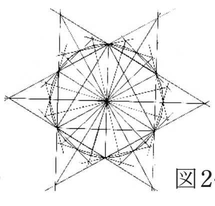

図2–60

このように、図形ソフトの作図機能を使うと、大量の作図が素早くでき、速やかに作図方法をチェックできるので、ここで示したように教材研究を深める上で大いに役立つことがわかる。

他にも、ここでは触れなかったが、作図機能が有効に活用される場面のひとつに、作図方法が正しいかどうかのチェックなどがある。例えば、ここで扱った円に内接する正五角形の作図方法を自分なりに見出したとき、それが正しいかどうかを確認するときにも活用できる（註5）。

3. 図形ソフトで点や直線を動かす

3–1. 動的なイメージを培う

図形ソフトでは、点や直線を動かしたときの様子が確認できるので、動的なイメージを培う上で効果的である。図形問題において、複数の解法を特殊と一般の関係で関連付ける際にも、この動的なイメージは有効に作用する。いくつかの例を示す。

【連動する3本の平行線】

三角形を平行四辺形に等積変形する解法を考える。図3–1の左上図は、三角形を長方形に等積変形している。長方形の条件を緩めて平行四辺形にしたのが右図である。点Pを動かすことよって、3本の平行線AP,QB,RCが連動する形で動く。左下図はこの連動する3本の平行線の内APとQBの2本が辺ABに重なったものである。このとき左上下図と右図は、特殊と一般の関係にある。図3–1は3つの解法の関連図であり、矢印は特殊の場合が一般の場合に含まれることを表している。

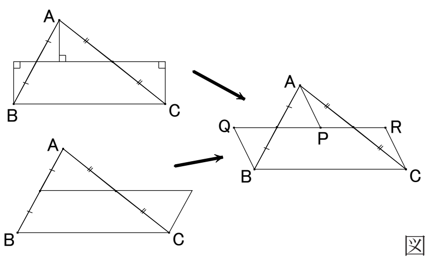

図3–1

【任意の点】

三角形の内角の和を求める解法を考える。図3–2の左上下図は頂点を通り1辺に平行な直線を引き、平行線の錯角が等しいことを使って、三角形の内角を頂点の周りに集め、和が平角になることを示している。これらを特殊な場合と捉え、任意の点を用いて一般化したのが右図である。平行線の錯角や同位角が等しいことを使って、任意

の点Pの周りに三角形の内角を集めている。点Pを動かして、頂点Aに一致させたのが左上図、頂点Cに一致させたのが左下図であり、左上下図は点Pを通る辺に平行な3直線の内の2直線が辺と重なった場合とみることができる。このとき左上下図と右図は、特殊と一般の関係にある。

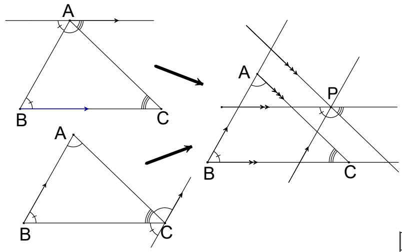

図3–2

【連動する直線】

台形を三角形に等積変形する解法を考える。図3–3の左上下図は、ともに頂点と辺の中点を結んだ直線によって三角形（△ABE, △DFC）に等積変形している。これらを特殊な場合と捉えて一般化したのが右図である。点Pを動かして、頂点Aに一致させたのが左上図、頂点Dに一致させたのが左下図であり、左上図は線分PQが辺ABに、左下図では線分PRが辺DCに重なっているとみることができる。このとき左上下図と右図は、特殊と一般の関係にある。

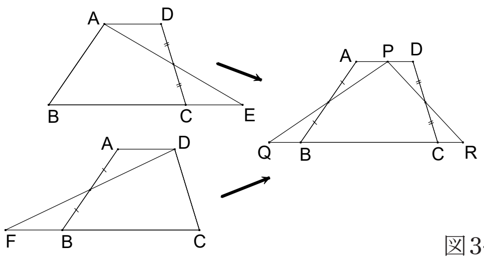

図3–3

上記のような図形の基本的な問題で動的なイメージを培っておくと、特殊な解法を見たときに、重なった直線が見えていないのではないか、という捉え方が生まれてくる。これは特殊な解法から一般化を図ろうとするときに、有効な補助線を見出す重要な観点になる。

3–2. 動的なイメージと補助線

図形の証明問題において、補助線が果たす役割は大きい。この補助線に着目し、複数の特殊な解法を関連させて、一般化した解法を見出すときの補助線の見出し方を考察する。題材としては、高校の平面図形の分野で扱うメネラウスの定理を取り上げる。

【メネラウスの定理】

下図のように、△ABCの辺BC, CA, ABまたはその延長が、三角形の頂点を通らない直線mと、それぞれ点P, Q, Rで交わるとき、

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

が成り立つ。

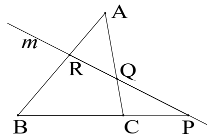

図3–4

教科書では、【解法1】【解法2】のような補助線を使った証明が紹介されている（註6)。

【解法1】

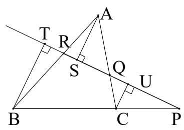

図3–5

【解法2】

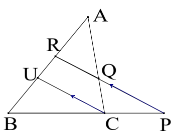

図3–6

筆者が高校で数学の授業を担当した経験から、生徒が引く補助線としては､次の【解法3】や【解法4】の場合が多くみられた。

【解法3】

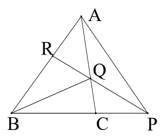

図3–7

【解法4】

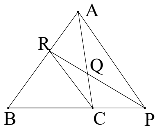

図3-8

【解法1】は、頂点A,B,Cから直線PRに垂線を下ろし、線分の比を垂線の長さの比に帰着させる方法で証明している（註7)。【解法2】は、点Cを通り直線PRに平行な直線を引き、線分の比を辺AB上に帰着させる方法で証明している（註8)。【解法3】は、点AとP、点BとQを結び、線分比を三角形の面積比に帰着させる方法で証明している（註9)。【解法4】は、点AとP、点CとRを結び、線分比を三角形の面積比に帰着させる方法で証明している（註10)。

ここで注目したいのは、【解法1】から【解法4】に示した補助線による解法は、すべて特殊な場合であるという点である。そこでこれらの解法の一般化を考えてみる。

【解法1】の証明の構造を把握しやすいように以下のようにa, b, cを用いて示す。

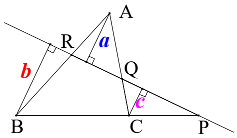

図3-9

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}\cdot\frac{a}{b}=1$$

このとき、この解法は頂点A, B, Cを通る3本の平行線にもとづいた三角形の相似を根拠にしているので、垂線であることには依存していない。したがって、前節の**【連動する3本の平行線】**を想起すると、3本の平行線を補助線とした次の【解法5】のような解法を見出すことができる。

【解法5】

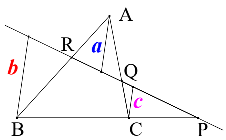

図3-10

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}\cdot\frac{a}{b}=1$$

【解法5】において、連動した3本の平行線が辺に平行となり、2本が重なった特殊な場合を考えると、次の【解法6】【解法7】【解法8】のような特殊な解法が見出される。

【解法6】（辺ABに平行）

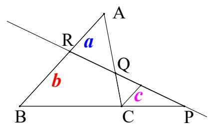

図3-11

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}\cdot\frac{a}{b}=1$$

【解法7】（辺BCに平行）

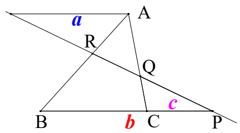

図3-12

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}\cdot\frac{a}{b}=1$$

【解法8】（辺ACに平行）

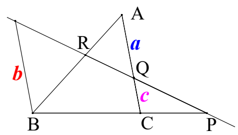

図3-13

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}\cdot\frac{a}{b}=1$$

他にも特殊な線分に平行な場合を考えると、【解法9】【解法10】【解法11】のような特殊な解法を見出すこともできる。

【解法9】（線分APに平行）

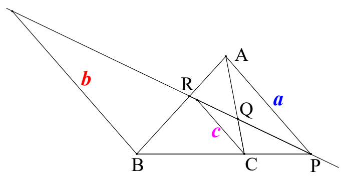

図3-14

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}\cdot\frac{a}{b}=1$$

【解法10】(線分BQに平行)

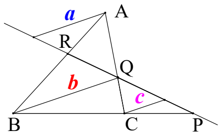

図3-15

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}\cdot\frac{a}{b}=1$$

【解法11】(線分CRに平行)

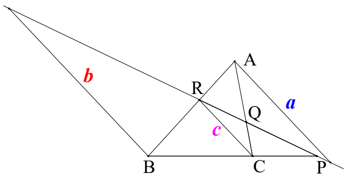

図3-16

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}\cdot\frac{a}{b}=1$$

このように【解法1】を一般化したことが、多くの特殊な解法を見出すことにつながった。

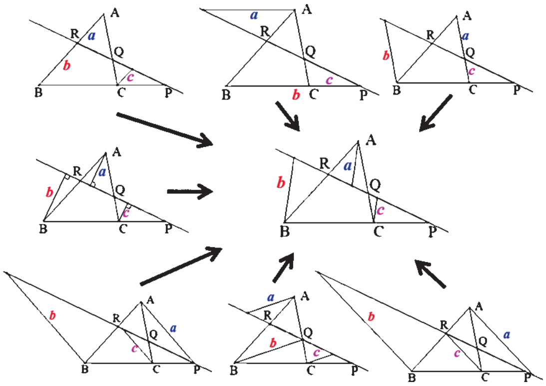

図3-17

次に【解法2】についての一般化を考えてみる。証明の構造を把握しやすいように以下のようにa, b, cを用いて示す。

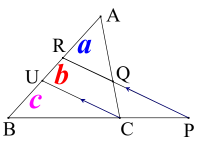

図3-18

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=\frac{b+c}{b}\cdot\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b+c}=1$$

【解法2】は、線分比を直線AB上に帰着させた特殊な解法である。そこで、まず直線BC上や直線AC上にも帰着させられないかと考えていくと、【解法12】【解法13】を見出すことができる。

【解法12】

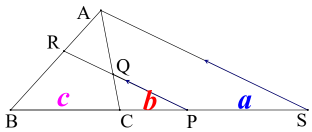

図3-19

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=\frac{b+c}{b}\cdot\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b+c}=1$$

【解法13】

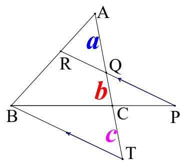

図3-20

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=\frac{b+c}{b}\cdot\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b+c}=1$$

さらに直線AP上に帰着させた場合を考えると【解法14】を見出すことができる。

【解法14】

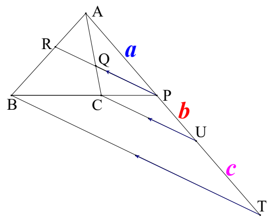

図3-21

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=\frac{b+c}{b}\cdot\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b+c}=1$$

これら【解法2】【解法12】【解法13】【解法14】の特殊な解法を関連付けて、一般化を図ることを考えてみる。前節の【任意の点】を想起し、任意の点に角度を集めたように、任意の直線に比を集めることができないかと考えると、これらを一般化した【解法15】を見出すことができる。

【解法15】（任意の直線n）

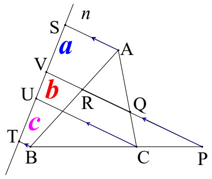

図3-22

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=\frac{b+c}{b}\cdot\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b+c}=1$$

つまり、【解法2】【解法12】【解法13】【解法14】と【解法15】は、特殊と一般の関係にある。

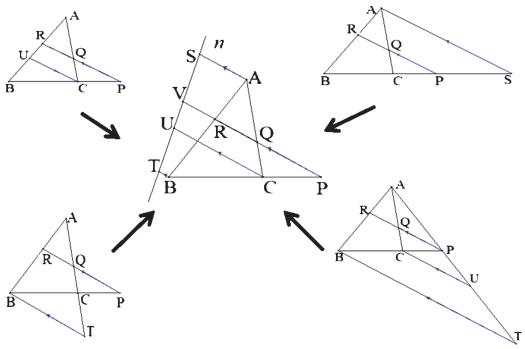
図3-23

続いて【解法3】と【解法4】の一般化を考えてみる。証明の構造を把握しやすいように以下のように色分けして示す。

【解法3】

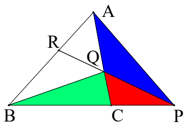

図3-24

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=\frac{{\color{green}\blacktriangle}+{\color{red}\blacktriangle}}{{\color{red}\blacktriangle}}\cdot\frac{{\color{red}\blacktriangle}}{{\color{blue}\blacktriangle}}\cdot\frac{{\color{blue}\blacktriangle}}{{\color{green}\blacktriangle}+{\color{red}\blacktriangle}}=1$$

【解法4】

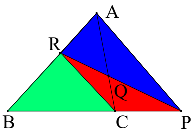

図3-25

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=\frac{{\color{green}\blacktriangle}+{\color{red}\blacktriangle}}{{\color{red}\blacktriangle}}\cdot\frac{{\color{red}\blacktriangle}}{{\color{blue}\blacktriangle}}\cdot\frac{{\color{blue}\blacktriangle}}{{\color{green}\blacktriangle}+{\color{red}\blacktriangle}}=1$$

この2つの特殊な解法を関連付けて、一般化を図る。前節の**【連動する直線】**を想起すると、直線PR上に任意の点Tをとった【解法16】のような一般化された解法を見出すことができる。図3-26の線分AT, BT, CTにおいて、【解法3】と【解法4】は線分ATがそれぞれ線分AR, AQに重なっていたと捉えることができる。

【解法16】

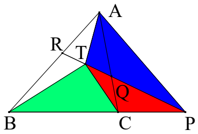

図3-26

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=\frac{{\color{green}\blacktriangle}+{\color{red}\blacktriangle}}{{\color{red}\blacktriangle}}\cdot\frac{{\color{red}\blacktriangle}}{{\color{blue}\blacktriangle}}\cdot\frac{{\color{blue}\blacktriangle}}{{\color{green}\blacktriangle}+{\color{red}\blacktriangle}}=1$$

つまり【解法3】【解法4】と【解法16】は、特殊と一般の関係にある。

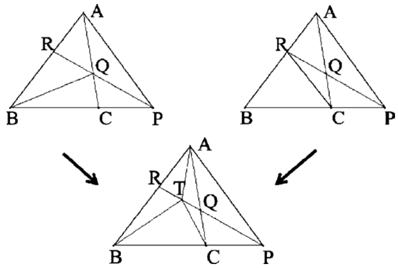
図3-27

前節の**【連動する3本の平行線】【任意の点】【連動する直線】**で扱った題材は、小学校や中学校で学ぶ基礎的な内容であるが、こうした基礎的内容において、図形ソフトで動的なイメージを培っておくことが、高校で扱う題材を考える上でも大切になる（註11）。【解法1】から【解法4】までの特殊な解法を一般化する過程で見たように、重なって隠れている直線を見出す力、任意の点や直線の利用に考えが及ぶ力など、見えないものが見えてくる想像力を育む上で、図形ソフトで培った動的なイメージが果たす役割は大きい。また、このように特殊と一般の関係に着目すると、多様な解法がいくつも見出されてくるので、「解法は1つで，それを覚えるのが数学の学習」という閉塞的な学習観からの解放も期待できる。

4. 電卓の活用

小学校6学年の算数の単元「ならべ方と組み合わせ方」で順列を学習した後、「自主勉強ノート」に「ディズニーランドの主なアトラクションに乗

る順番は何通りあるか」を調べてきた児童がいた（註12）。主なアトラクションとして16個挙げ、16の階乗の式を立て、実際に計算をして20兆通り以上にもなることを発見し、驚きの感想がそえられていた。さらに翌日は、ディズニーシーバージョンで、アトラクションを25個に増やして25の階乗に挑戦していた。このように、大きな数になる階乗の計算を児童自身が見出し、その計算結果に知的関心が向いているときこそ、電卓の活用場面にできないかと考えた。

8桁電卓で25!を算出するときの一例である。8桁電卓だと、1×2×3×4×…と順に掛けていくと11まで掛けたときに表示される39916800が限界で、さらに12をかけるとエラーになってしまう。そこで、電卓に改めて3991.6800と入力して単位を万にし、再び12,13,14,15と掛けていく。15を掛けるとエラーになってしまうので、14まで掛けたとき表示される8717829.1を活かして、電卓に改めて871.78291を入力して今度は単位を億にし、再び15,16,17,18と掛けてく。こうした操作を繰り返すことによって、25!は15秭（シ）5112垓（ガイ）という概数で表すことができるとわかる（註13）。

児童が見出した16!や25!を題材とすることによって、兆より大きい数に対する興味・関心が高まり、計算結果を8桁電卓で算出する過程で、単位をかえて計算する工夫や、概数で表すことなどの理解を深めることができる。また、8桁電卓でこんなに大きな数まで扱えることは、児童にとっては大きな発見でもある（註14）。

5. おわりに

図形ソフトの作図機能は、作図が素早くでき、作図結果をもとにした分析・考察が行えるで、教師の教材研究の場面でも大いに活用できることを、正多角形の作図という例で具体的に示した。また、図形ソフトは動的なイメージを培う上で効果的であり、解法どうしを特殊と一般の関係で関連付ける補助線を見出す際にも有効に作用することを明らかにした。電卓の活用については、子どもの知的関心にもとづいた活用場面を考察した。

今後も、算数・数学教育におけるテクノロジーの様々な活用場面を探究していきたいと考えている。

註

(1) 本稿では、テクノロジーを広く捉えてアプリケーションソフトも含めている。使用した図形ソフトは、カブリログ社（フランス）により製作された幾何ソフト「Cabri II plus」である。日本ではNaoco Inc.（株式会社ナオコ）が輸入・販売を行っている。

(2)「方法①三」の「三」は正三角形を表している。以下同様に「四」「五」もそれぞれ正方形と正五角形を表している。

(3) ∠CAD（円周角）の二等分線を引くとしてもよい。

(4) 長さの実測により中点を見出す方法もあるが、ここではそれを省いた。

(5) 円に内接する正五角形の作図方法（チェック済）を二例示す。図5-1のように、①直角三角形AOP（AO⊥PO, PO=2AO）をかく②AO=AQとなる点Qをとり、QPの中点をRとし、QRの中点をSとする③QS=QTとなる点Tをとり、AT=AGとなる点Gをとる④点Gを通りAOに垂直な直線と円との交点を点B,Eとする⑤AB=BC=CDとなる点C, Dをとる。

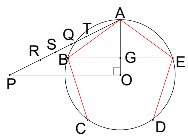

図5-1

図5-2のように、①点A, B, C, Dをとる（AB⊥CD）②OBの中点をEとする③点Eを中心に半径ECの円をかき点Fをとる④点Cを中心に半径CFの円をかき円Oとの交点をG, Jとする⑤CG=GH=HIとなる点H, Iをとる。

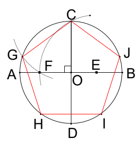

図5-2

(6) 例えば、図3-5は「LEVEL UP 数学Ⅰ＋A」数研出版（平成18年度版）p.40、図3-6は「高等学校 新

編 数学A」桐原書店（平成9年度版）p.113などに掲載されている。

(7)【解法1】頂点A, B, Cから直線PRに垂線を下ろし、その足をそれぞれS, T, Uとすると、AS//BT//CUであるから、△BTP∽△CUP, △CUQ∽△ASQ, △ASR∽△BTRとなるので、

$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=\frac{\mathrm{BT}}{\mathrm{CU}}\cdot\frac{\mathrm{CU}}{\mathrm{AS}}\cdot\frac{\mathrm{AS}}{\mathrm{BT}}=1$　となる。

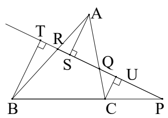

図5-3

(8)【解法2】頂点Cを通り直線PRと平行な直線と辺ABとの交点をUとすると、CU//PRであるから、BP：PC＝BR：RU, CQ：QA＝UR：RAとなるので、

$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=\frac{\mathrm{BR}}{\mathrm{RU}}\cdot\frac{\mathrm{UR}}{\mathrm{RA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1$　となる。

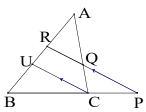

図5-4

(9)【解法3】線分AP, BQを引くと、

$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=\frac{\triangle\mathrm{BQP}}{\triangle\mathrm{CQP}}\cdot\frac{\triangle\mathrm{CQP}}{\triangle\mathrm{QAP}}\cdot\frac{\triangle\mathrm{QAP}}{\triangle\mathrm{BQP}}=1$　となる。

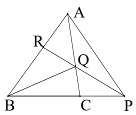

図5-5

(10)【解法4】線分AP, CRを引くと、

$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=\frac{\triangle\mathrm{BRP}}{\triangle\mathrm{CRP}}\cdot\frac{\triangle\mathrm{CRP}}{\triangle\mathrm{RAP}}\cdot\frac{\triangle\mathrm{RAP}}{\triangle\mathrm{BRP}}=1$　となる。

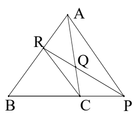

図5-6

(11) 3-1節で扱った題材は面積や角度で、3-2節で扱った題材は線分比であり、題材的には異なるが、ともに図形ソフトによる動的なイメージをもとにして補助線を見出すという点では共通している。

(12) この授業は、2019年9月に神奈川県の公立小学校において行われた。授業者は千田真佑子氏。

(13) 18まで掛けた64023730を活かして、ここで今度は単位を兆にし、電卓に改めて6402.3730と入力して、それに再び19, 20, 21と掛けていき、21まで掛けた51090933を活かして、ここで今度は単位を京にし、電卓に改めて5109.0933と入力して、それに再び22, 23, 24と掛けていき、24まで掛けた62044826を活かして、ここで今度は単位を垓（ガイ）にして、電卓に改めて6204.4826と入力して、それに25を掛けると、155112.06となり、概数15秭（シ）5112垓（ガイ）を得る。ここでは誤差に深入りしないが、例えば最後に電卓表示された155112.06の右端の「06」には誤差が含まれている。

(14) ここで扱った16!は十分手計算の範疇にある。実際児童も手計算で正確な計算結果を算出していた。しかし、25!の手計算はかなりの集中力を要し、実際児童も正確な計算結果にたどり着いていなかった。そこで、ここでは計算したいという児童の要求に沿って、電卓の活用場面としての可能性を考察した。

参考文献

佐伯昭彦他編著,「テクノロジーを活用した新しい数学教育」, 明治図書, 1997年

佐藤諒著,「算数と図形2 五角形の世界」, 星の環会, p.24, 2003年

中込雄治・生野金三, 特別支援学校におけるテクノロジーを活用した数学教材の開発とその指導法, 実践女子大学生活科学部紀要第50号, pp.69-75, 2013年

中込雄治・黒木伸明, 図形教材と図形ソフト, Teachers Teaching with Technology Japan 第17回年会, pp.102-106, 2013年

中込雄治・黒木伸明・加藤はるか, 算数・数学の教材開発と図形ソフト, Teachers Teaching with Technology Japan 第18回年会, pp.98-101, 2014年

中込雄治・黒木伸明,「特殊と一般の関係」と図形ソフト, Teachers Teaching with Technology Japan 第20回年会, pp.104-107, 2016年

中込雄治, 多様な解法を引き出す数学教材の研究, 宮城学院女子大学発達科学研究№.16, pp.13-22, 2016年

中込雄治・中村順子・黒木伸明, 算数・数学教育と図形ソフト, Teachers Teaching with Technology Japan 第21回年会, pp.74-75, 2017年

齋藤昇他編著,「子どもの学びを深める新しい算数科教育法」, 東洋館出版, 2018年