宮城学院女子大学発達科学研究
2018. 18. 20-29

思い込みと教育方法

中　込　雄　治[1]
黒　木　伸　明[2]

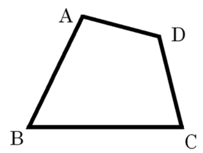
子どもに主体的・対話的で深い学びを保障することが求められている。そのために、新たな教育方法が探究されることは必要なことである。同時に、その新たな方法が妥当なものであるかどうかを検証し続けていくことも重要である。例えば、初期の段階で無意識の内に入り込む先入観・思い込みにとらわれてしまうと、探究の結果が思わぬ誤謬を犯すことになりかねない。ここでは教育方法、特に発問の仕方に着目し、子どもの思考を深めるための発問の工夫を考えたときに陥りやすい思い込みと、その思い込みを払拭する手立てについて明らかにした。具体的事例としては「四角形を三角形に等積変形する問題」を取り上げた。

Keywords：思い込み、教育方法、等積変形、多様な解法、特殊と一般の関係

1. はじめに

中学2年生の数学の教科書に、四角形を三角形に等積変形する作図題として、次のような問題が掲載されている[1)]。

次の図に四角形ABCDと面積が等しい三角形をかきなさい。



これは平行線を利用して等積変形する方法を学習した直後に出てくる問題である。解法としては、次の【方法1】のように四角形の対角線を利用した例が想定されている。

【方法1】

頂点Dを通り対角線ACに平行な直線を引き、直線BCとの交点をEとする。
AC//DEより、△DAC＝△EAC
よって、四角形ABCD＝△ABE　　Q.E.D.

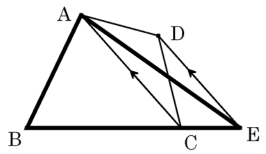


図1

解法は他にもあるので、子どもから多様な解法を引き出そうとして、問題の出し方を工夫し、次のように設定した授業実践例がある[2)]。

四角形ABCDを等積変形してできる三角形は何通りあるか。

この実践例では「正解は8通り」という思い込みが先行して授業が構成されている[3)]。

この授業実践例を大学の授業の中で紹介したところ、正解を有限個とした誤りを指摘した学生もいたが、その指摘があるまで多くの学生は「正解は8通り」と思い込んでいた。そこでそのような思い込みが生じた理由について学生にアンケートをとり、それぞれの考えを綴ってもらった[4)]。

本稿では、この授業実践例において生じた思い込みに対する学生アンケートの分析、及び授業実践者側が「正解は有限個」と思い込むその背景についての分析を行い、こうした思い込みを払拭する手立てを考察した。

1. 宮城学院女子大学教育学部
2. 上越教育大学名誉教授

2. 四角形を三角形に等積変形する方法

大学の授業では、子どもから多様な解法を引き出そうとして「何通りあるか」という発問にしたところがこの実践例で工夫された点であることと、そのとき正解とされた「8通り」について紹介し、続いて学生が指摘した別の解法を取り上げた。

まず正解とされた「8通り」の解法を押さえる。【方法1】では直線BC上に点Eをとったが、直線ＢＡ上に点Eをとる【方法2】のような解法も考えられる。

【方法2】

頂点Dを通り対角線ACに平行な直線を引き、直線BAとの交点をEとする。

AC//EDより、△DAC＝△EAC

よって、四角形ABCD＝△EBC　Q.E.D.

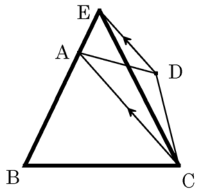


図2

【方法1】【方法2】では直線ACの上側に△DACと等積な△EACを見出したが、同様にして【方法3】【方法4】のように直線ACの下側に△EACを見出すこともできる。

【方法3】（証明略）

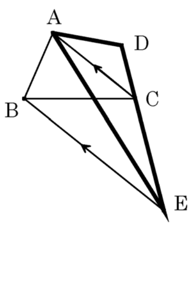


図3

【方法4】（証明略）

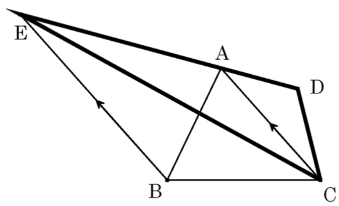


図4

授業実践例では、「１本の対角線ごとに4つの等積変形ができ、対角線は2本だから合計8通りの三角形が作図できる」としている。つまり【方法1】～【方法4】は対角線ACをもとにした解法だが、対角線は2本あることから、もう1本の対角線BDに対しても同様に次のような解法【方法5】～【方法8】が見出せることに着目しているのである。

【方法5】（証明略）

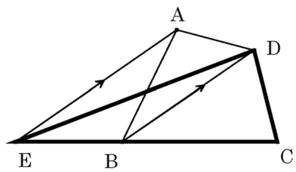


図5

【方法6】（証明略）

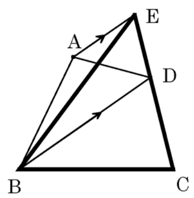


図6

【方法7】（証明略）

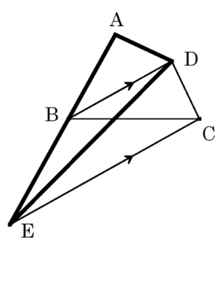


図7

【方法8】（証明略）

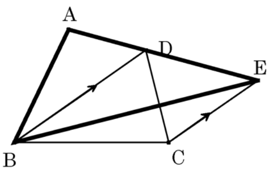


図8

授業実践例をここまで紹介したときに、学生から「この8通り以外にも解法がある」という指摘があった。別の解法は2名の学生から1通りずつ挙げられたが、その内の1つが【方法9】の解法である。対角線ACに平行な直線を2本同時に引くことで頂点Cを通る任意の直線を用いた解法を見出すことができていた。

【方法9】

対角線ACに平行で頂点B,Dを通る直線をそれぞれl,mとし、頂点Cを通る任意の直線nとl,mとの交点をそれぞれP,Qとする。

AC//lより、△BAC＝△PAC

AC//mより、△DAC＝△QAC

よって、四角形ABCD＝△APQ　Q.E.D.

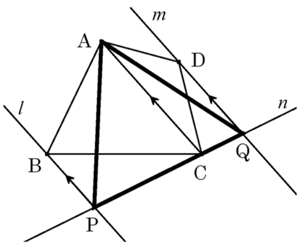


図9

もう1つ指摘された解法は、【方法10】の解法である。考え方は【方法9】と同じであるが、頂点Aを通る任意の直線を用いた解法になっている。

【方法10】（証明略）

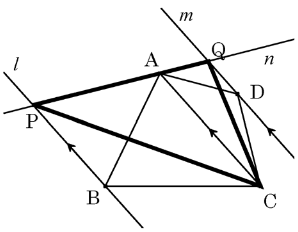


図10

この【方法9】【方法10】では任意の直線を用いて三角形を作っていることから、このとき四角形ABCDと面積の等しい三角形は無数に存在することになる。

授業では、【方法1】〜【方法8】を紹介し、続いて学生から指摘があった【方法9】と【方法10】を取り上げた。挙手により調査したところ、指摘があるまで解法が8通りだと思い込んでいた学生は9割（50名中45名）であった。そこでそうした思い込みが生じる理由について学生にアンケートをとり、それぞれ考えを綴ってもらった。

3. 思い込みが生じる理由

ここでは学生のアンケートの分析から、「8通り」と思い込むに至った理由について検討していく。

理由は以下のA〜Fに分類することができた。括弧内は延べの人数とパーセンテージである。(アンケートは50名の学生を対象に実施した。)

A.「何通りあるか」という発問にして、子どもから多様な解法を引き出そうとしたことに感心してしまい、その「何通り」という文言に引きずられてしまった。(20名40%)

B. 次々と解法が導き出されていく様子に驚き、満足してしまった。(12名24%)

C. 本で紹介されていると聞いたので疑わなかった。(10名20%)

D. 計8通りというその数の多さに十分であると思ってしまった。(6名12%)

E. 対角線に平行な補助線は1本しか引かないものと思ってしまった。(4名8%)

F. 特殊な場合の解法しか学んでこなかったので、一般化された解法までは思いつかなった。(2名4%)

学生の回答から、子どもから多様な解法を引き出そうとする工夫を高く評価している様子、解法が次々に導き出されていくことや8通りが予想外の多さであったことに感心している様子などが見て取れる。(A,B,D) これらのことから、子どもから多様な解法を引き出そうとすること自体が大

変新鮮なこととしてとらえられているのがわかる。逆に言えば、「解法は1つ」という思い込みが多くの学生に内在しているということが推察される。これは特殊な解法しか学んでいないことに起因していると思われる。(F)

以上のことから、「解法は1つ」という思い込みを払拭し、多様な解法を引き出すという発想ができるようになることが、学生たちの抱えている課題であるとわかった。この課題を解決するためには、学生自身が多様な解法を見出せるようになり、一般化された解法にまで思いが及ぶような力を身に付けることが必要であると考える。

4.「正解は有限個」と思い込む背景

初期の段階で無意識の内に入り込む思い込みにとらわれてしまうと、探究の結果が思わぬ誤謬を犯すことになりかねない。この授業実践例において、子どもから多様な解法を引き出そうという工夫は学びの質を高めることにつながるものであったといえる。しかし解法が有限個という先入観にとらわれてしまうと、はじめから「正解は8通り」と想定して出題してしまうので、「何通りあるか」という問いかけになり、【方法1】〜【方法8】以外の解法、例えば【方法9】【方法10】のような解法を子どもから引き出すことができない。【方法9】や【方法10】のような解法に気づいていた、あるいは気づきかけていた子どもの可能性の芽を摘むことになりかねない。

では、そもそもなぜ「正解は有限個」という思い込みにとらわれてしまったのであろうか。その背景にあるものを見極めておくことが大切である。そこには、学生アンケートの回答にもあったが、これまで特殊な解法ばかり学んできたので一般の解法には考えが及ばないという背景があると考えられる。過去における算数・数学の学習が特殊な解法を中心とした学習であったため、「任意の」というニュアンスを含む補助線を用いた一般の解法にまで目が向かず、高々有限個の特殊な解法しかないと思い込んでしまうのである。つまり、「特殊と一般」という観点を喪失しているのである。

そうした一例を挙げると、小学校教員を目指す学生が履修している授業においても、三角形と四角形を描くように指示すると、ほとんどの学生が、三角形は正三角形か二等辺三角形、四角形は正方形か長方形という特殊な図形しか描かないのが実態である[5)]。まさにこの「特殊と一般」という観点を培うことが授業者側の課題なのである。

それでは「特殊と一般」という観点を培うためには、どうすればよいのであろうか。その1つの方途として、解法間における「特殊と一般の関係」を見出せるようになる力を身に付けることが挙げられる。「特殊と一般の関係」に着目できるようになると、常に一般化された解法の存在を意識するようになる。特殊な解法ばかりにとらわれていたからこそと生じてしまった思い込みを、「特殊と一般の関係」に着目することによって払拭できれば、「正解は有限個」という思い込みから解き放され、「特殊と一般」の観点を活かした問題づくりが行えるようになる。例えば出題時に解法が8通りしか思いつかなくても、一般化された解法があるかもしれないという思いがあれば、「正解は8通り以上」あるいは「正解は少なくとも8通り」とする配慮が働くようになる。

この「特殊と一般の関係」に着目するという方法は、多様な解法を引き出す数学的手法の1つでもある。多様な解法を引き出す数学手法には他に「対の関係」に着目する方法などもあり、こうした手法を身に付けることによって、特殊な解法だけでなく一般の解法を含んだ多様な解法を見出せるようになる。そこで、「対の関係」や「特殊と一般の関係」を身に付けることをねらいとして、多様な解法を引き出す教材の開発を試みることにした。そのことよって、「特殊と一般」という観点が培え、「正解は有限個」という思い込みを払拭することが期待できると考える。また同時に、これは、前節で見出した課題、「解法は1つ」という思い込みの払拭及び多様な解法を引き出そうとする発想の育成にも、直結するものであると考える。

5. 思い込みを払拭する教材開発

ここでは見出された課題の解決の手立てとして、多様な解法を引き出すための教材の開発を試みる。授業実践例で扱った題材を教材開発の対象とし、多様な解法を引き出す数学的手法を指導内容に組み込んだ教材として開発する。

まず問題文を、次のようにする。

四角形ABCDと面積の等しい三角形を作図せよ。またいろいろな作図方法を考えよ。

そしてこの問題を通して、「対の関係」「特殊と一般の関係」に着目するという数学的手法を指導していく。まず【方法1】〜【方法10】をもとに、「対の関係」や「特殊と一般の関係」に着目する方法について述べる。

「対の関係」とは、上と下、左と右、内と外のような関係を指す。例えば【方法1】【方法2】は、ともに頂点Dを通り対角線ACに平行な直線上に点Eをとっている。このとき【方法1】と【方法2】では頂点Dを挟んで反対側に点Eをとっていることから、これらの方法は「対の関係」にあるといえる。こうした「対の関係」に着目させることによって、例えば【方法3】から【方法4】を、【方法5】から【方法6】を、【方法7】から【方法8】を見出させることができる。

また頂点Dを通り対角線ACと平行な直線と、頂点Bを通り対角線ACに平行な直線は、対角線ACに対して反対側にあり、これらも「対の関係」にあるといえる。この「対の関係」に着目させることによって、例えば【方法1】【方法2】から【方法3】【方法4】を、【方法5】【方法6】から【方法7】【方法8】を見出させることができる。

対角線ACと対角線BDは「対の関係」にあるので、【方法1】〜【方法4】を思いついたときこれらが対角線ACをもとにしていることに着目させれば、ここでも「対の関係」から、さらに【方法5】〜【方法8】を引き出させることができる。（多様な解法のとらえ方は子ども個々のレベルによって異なり、例えば【方法1】〜【方法8】は構造的に同じものと見なすレベルの子どももいる。）

また【方法9】と【方法10】においても、対角線ACの両端の点を通る任意の直線を用いている関係なので、「対の関係」が見出せる。さらにここで対角線ACと「対の関係」にある対角線BDに注目して同様に解法を考えていくと、次のような【方法11】【方法12】を見出すことができる。（【方法11】と【方法12】も「対の関係」にある。）

【方法11】（証明略）

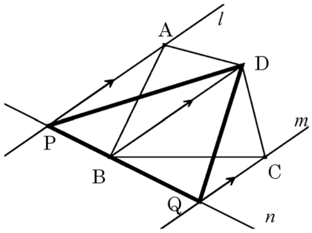


図11

【方法12】（証明略）

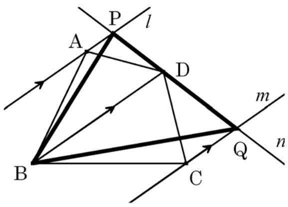
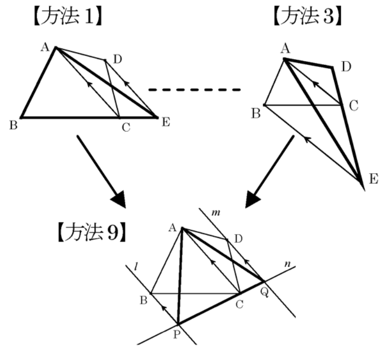


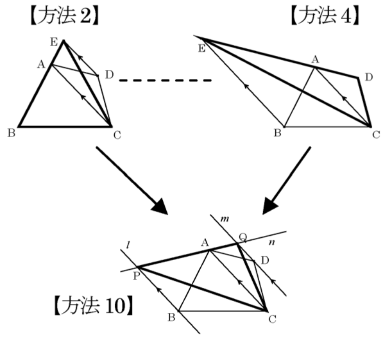
図12

「特殊と一般の関係」とは【方法1】と【方法9】のような関係を指す。【方法9】において、任意の直線nが辺BCと重なった場合が【方法1】であるととらえることができ、このとき【方法1】は【方法9】の特殊な解法、逆に【方法9】は【方法1】を一般化した解法と見ることができる。同様に、【方法3】と【方法9】も「特殊と一般の関係」にあるといえる。ここで【方法1】と【方法3】は対角線ACに対して等積変形した三角形が反対側にあり「対の関係」にあるといえるので、【方法1】【方法3】【方法9】の関係は関連図1のように表すことができる。矢印は「特殊と一般の関係」、点線は「対の関係」を示している。

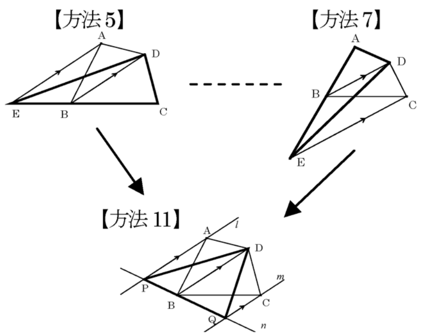


関連図1

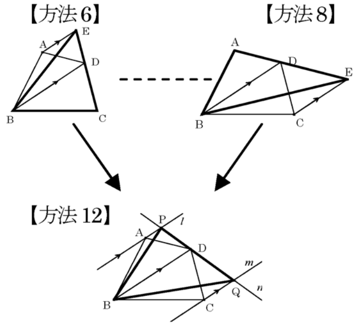
同様の観点でみると、【方法2】【方法4】と【方法10】、【方法5】【方法7】と【方法11】、【方法6】【方法8】と【方法12】においても、それぞれ関連図2,3,4のように「特殊と一般の関係」にあることがわかる。



関連図2



関連図3



関連図4

こうした解法の関連図からは、解法間の関係が把握できると同時に、「対の関係」にある2つの特殊な解法から、それらを一般化した解法を見出すことができる可能性があることもつかめる。

例えば【方法1】の△ABEと【方法5】の△DECに着目すると、それぞれの頂点A,Dが辺ADの両端にあり、これらは「対の関係」にあるといえる。ここで辺AD上にとった任意の点Pが端点Aに重なった場合が【方法1】で端点Dに重なった場合が【方法5】であるととらえると、この【方法1】と【方法5】を結びつける形でそれらを一般化した【方法13】のような解法を見出すことができる。

【方法13】

辺AD上に任意の点Pをとる。頂点Aを通りPBに平行な直線及び頂点Dを通りPCに平行な直線と、直線BCとの交点をそれぞれQ、Rとする。

PB//AQより、△ABP=△QBP

PC//DRより、△DPC=△RPC

よって、四角形ABCD=△PQR　Q.E.D.

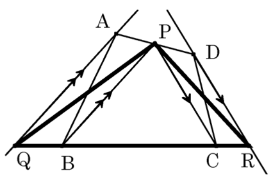
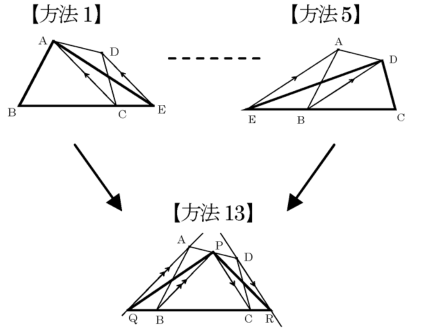


図13

つまり【方法1】【方法5】と【方法13】は「特殊と一般の関係」にあり、これらの関係は関連図5のように表すことができる。



関連図5

また、【方法13】では△ABPと△DCPの面積を下側へ等積変形したが、ここでも「対の関係」に着目して上側に等積変形することを考えると【方法14】のような解法も見出すことができる。

【方法14】（証明略）

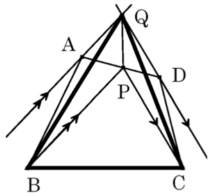
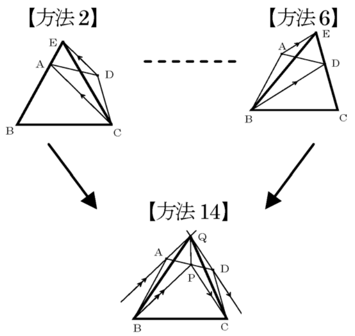


図14

この【方法14】をもとにして「特殊と一般の関係」に着目すると、点Pが頂点Aに一致した場合として【方法2】を見出すことができ、点Pが頂点Dに一致した場合として【方法6】を見出すことができる。このように一般化された解法から逆に特殊な解法を見出すこともできるのである。これらの関係も関連図6のように表すことができる。



関連図6

他にも、例えば【方法13】では、点Rの位置を頂点Dより下側にとっているが、「対の関係」に着目して、【方法15】のように頂点Dの上側にとる解法を見出すこともできる。

【方法15】
辺AD上に任意の点Pをとる。頂点Aを通りPBに平行な直線と直線BCとの交点をQとする。頂点Dを通りPCに平行な直線と直線QPとの交点をRとする。
PB//AQより、△ABP＝△QBP
PC//DRより、△DPC＝△RPC
よって、四角形ABCD＝△RQC　　Q.E.D.

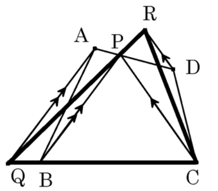


図15

さらに「対の関係」に着目すると、【方法15】から【方法16】を見出すことができる。

【方法16】（証明略）

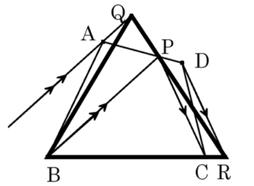
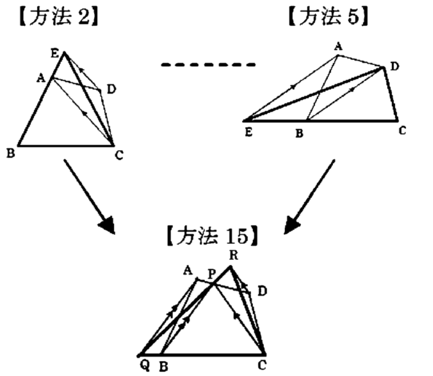


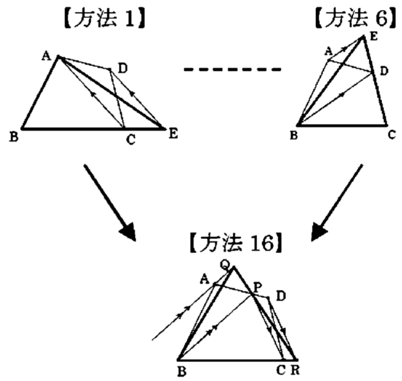
図16

【方法15】においても、点Pが頂点Aと一致する場合が【方法2】で、点Pが頂点Dと一致する場合か【方法5】であるととらえることができ、これらは「特殊と一般の関係」にあるといえ、これらの関係は関連図7で表すことができる。



関連図7

同様の関係が【方法16】と【方法1】【方法6】の間にも見て取れるので、これらの解法の関連に注目すると関連図8を得ることができる。



関連図8

さらにここで【方法13】【方法14】における点Pは辺AD上にあるが、これを直線AD上の線分AD内にとった点ととらえると、再び「対の関係」から線分AD外にとった【方法17】と【方法18】のような解法を見出すことができる。(【方法17】と【方法18】も任意の点Pを線分ADの両側にとっているので「対の関係」にあるといえる。)

【方法17】
図17のように直線AD上に任意の点Pをとる。頂点Aを通りPBに平行な直線及び頂点Dを通りPCに平行な直線と直線BCとの交点をそれぞれQ,Rとする。
PB//AQより、△BAQ=△PAQ
PC//DRより、△DPC=△RPC
よって、四角形ABCD=△PQR　　Q.E.D.

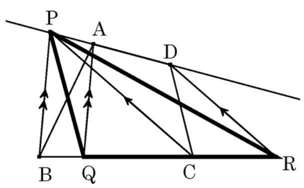


図17

【方法18】(証明略)

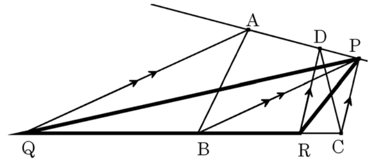


図18

さらに【方法13】【方法14】における点Pは辺AD上にあるが、辺上を特殊な場合ととらえると、辺外に任意の点Pをとった一般の場合の解法が検討できる。例えば四角形の内側にとった任意の点Pを用いた【方法19】や、四角形の外側にとった任意の点Pを用いた【方法20】などの解法を見出すことができる。(【方法19】と【方法20】も「対の関係」にある。)

【方法19】
図19のように四角形ABCDの内側に任意の点Pをとる。頂点Aを通りPBに平行な直線と直線BCとの交点をQとする。頂点Aを通りPDと平行な直線と直線CDの交点をRとする。点Rを通ってPCに平行な直線と直線BCとの交点をSとする。
PB//AQより、△ABP=△QBP
PD//ARより、△APD=RPD
PC//RSより、△RPC=△SPC
よって、四角形ABCD=△PQS　　Q.E.D.

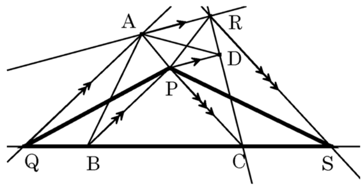


図19

【方法20】(証明略)

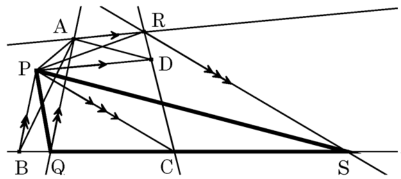


図20

この【方法19】【方法20】における任意の点Pを辺AD上にとったものが【方法13】【方法14】ととらえると、これらは「特殊と一般の関係」に

あるといえる。

他にも、【方法21】のように頂点B,Dを通り対角線ACに平行な直線を引いておいて、頂点A,Cを通る任意の平行線を引いて平行四辺形PQRSをつくれば、この平行四辺形の面積は四角形ABCDの面積の2倍になっているので、例えば△PQSに注目すれば、その面積は四角形ABCDの面積に一致することになる。

【方法21】（証明略）

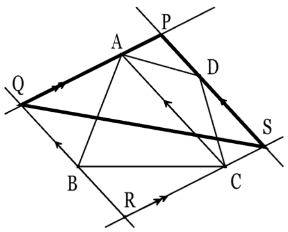


図21

6. おわりに

本稿では、「四角形を三角形に等積変形する問題」を扱った授業実践例もとに、学生に行った思い込みが生じる理由に関するアンケート分析や、授業実践者側が「正解は有限個」と思い込むその背景についての分析を行い、こうした思い込みを払拭する手立てを考察した。

アンケートの分析から、「解法は1つ」という思い込みを払拭すること、多様な解法を引き出すという発想ができるようになることが、学生たちの抱えている課題であるとわかった。

「正解は有限個」と思い込むその背景の分析から、過去における算数・数学の学習が特殊な解法を中心とした学習であったため、「任意の」というニュアンスを含む補助線を用いた一般の解法にまで目が向かず、高々有限個の特殊な解法しかないと思い込んでしまうということが推測され、「特殊と一般」という観点を培うことが課題であることがわかった。

こうした課題を解決するため、解法間における「特殊と一般の関係」を見出す力を身に付けることを考えた。解決の手立てとして、多様な解法を引き出す数学的手法を指導内容に組み込んだ教材開発を試みた。授業実践例で扱った「四角形を三角形に等積変形する問題」を教材開発の対象として取り上げたところ、20通りを超える解法を引き出すことができ（一般の場合の解法も1通りとカウントしている）、こうした多様な解法を引き出す教材開発を通して「特殊と一般の関係」を見出す力を身に付けることができることを明らかにした。

今後もこのような数学教材の開発を行っていきたいと考えている。

註

1）数学の世界2年，大日本図書，平成26年発行，p.173

2）学校の挑戦―学びの共同体を創る―，佐藤学著，小学館，pp.49-53，2006年

3）上記2）の本における「ジャンプする学びへ」(p.49）という節に次のようにある。

「協同する学びの最大のメリットは、背伸びとジャンプのある学びをすべての子どもに保障することにある。この可能性について、多くの教師は無自覚である。協同する学びは、しばしば奇跡と思われるほどの高水準の学びをすべての子どもに実現する。その一例を紹介しよう。」(p.49）とあり、「四角形の等積変形」(p.49）の授業実践が紹介されている。「教科書では四角形ABCDを等積変形によって三角形を作図する課題が示されている。この四角形の三角形への等積変形の作図の問題ならば、通常、教室の生徒の半数以上は解法を理解し、テストでも半数近くが正解を答えることができるだろう。そしてグループ学習を導入すれば、生徒全員が容易に正解に達することは確実である。そこで、鈴木さんは『ジャンプのある学び』を実現するために、より高度の課題を設定することにした。『四角形ABCDを等積変形してできる三角形は何通りあるか』という問題である。」(p.49)、「正解は8通りなのだ」(p.52）とあり、「この問題の本質である『1本の対角線ごとに4つの等積変形ができ、対角線は2本だから合計8通りの三角形が作図できる』という認識」(p.52）が述べられ、「しばらくすると、どのグループも『8通り』の作図を実現し、すべてのグループがこの難問を解決することができた。協同的な学びの威力

は素晴らしい。」(p.52) とまとめられている。(しかし実際には、この問題の正解は無数に存在する。したがってこの難問は解決していないことになる。)

4) 2017年12月に宮城学院女子大学学芸学部児童教育学科4年生50名を対象に行った授業「教育方法論」の中で、この「四角形を三角形に等積変形する問題」を題材にした授業実践例を紹介した。

5) 2015年8月に玉川大学通信教育部2年生83名を対象に行った授業「算数科教育法」の中で三角形と四角形を描かせたところ、特殊な三角形を描いた学生が76名(正三角形または二等辺三角形70名、直角三角形6名)で92%、特殊な四角形を描いた学生が81名(正方形または長方形79名、平行四辺形2名)で98%であった。(図形の性質などを調べるときには、一般性を損なわない図形を描くことが求められる。例えば正三角形では重心も内心も外心も垂心も一致してしまう。)

参考文献

中込雄治・黒木伸明,「多様な考え方を引き出し特殊と一般の構造を見いだす幾何教材の開発」, 数学教育学会誌Vol.43 No.3・4, pp.27-35, 2003年

中込雄治・黒木伸明,「多様な解法を引き出す方法とCabri」, Teachers Teaching with Technology Japan第10回年会, pp.128-131, 2006年