宮城学院女子大学発達科学研究
2017. 17. 33-44

多様な解法を引き出す数学的手法とチェバの定理

中　込　雄　治[1]

数学の学習を「自分のアイデアにこだわり既習事項を関係付けて自分なりの解法を見出していく」活動として捉えさせ、数学的課題に主体的に取り組む児童生徒を育成したい。そのためには、多様な解法の存在を確認できる教材、さらに多様な解法を見出す数学的手法を獲得することができる教材を児童生徒に示すことが重要であり、そうした数学教材を開発することが求められていると考える。ここではそのような教材開発の題材として高校数学で扱う「チェバの定理」を取り上げ、その開発方法を明らかにした。

Keywords：多様な解法、チェバの定理、特殊と一般の関係

1. はじめに

現在多くの児童生徒が「与えられた解法を覚え、それに数値等を当てはめて問題を解くのが数学の学習である」という数学に対する閉塞的な学習観に囚われているという実態がある。1)

(1) 研究の目的

上記のような学習観を払拭するとともに、数学の学習を「自分のアイデアにこだわり既習事項を関係付けて自分なりの解法を見出していく」活動であると捉えさせること、つまり数学の学習観の転換を図ることが喫緊の課題である。数学の学習観の転換を図るためには、児童生徒に次のことを実感させることのできる教材を開発することが求められている。

① 多様な解法の存在が確認できる教材
② 多様な解法を見出すための数学的手法が獲得できる教材

多様な解法の存在を示すことによって、解法は1つだけではないことを確認させ、それらを見出す数学的手法を習得させることによって、自分のアイデアにこだわり既習事項を関係付けて自分なりに解法を見出していこうとする姿勢を培い、学習観の転換を図っていきたい。

ここでの「多様な解法を見出すための数学的手法」とは、解法間の「対の関係」や「特殊と一般の関係」に着目させるという方法のことを指す。この方法を活用すると、多様な解法の存在が確認できたり、1つの定理に対してもそれを導く多くの解法（証明方法）を見出すことができたりするようになる。図形の基本的な定理に関しては、多くの場合その証明方法において多様な解法が考えられる。ここでは高校数学「数学A」にある「チェバの定理」をこの「多様な解法を引き出す教材」として開発して多様な証明方法を考えていく。

(2) 研究の背景

数学教育での多様な解法に関する研究は、これまで多様な考え方に関する研究の一部として行われてきた（古藤1986, 1990, 相馬1992）。そこでは多様な解法を引き出すことの重要性が強調されると同時に、実際に子どもから出された多様な解法について、それらをどのように分類したりまとめたりするか、またそうした分類やまとめの活動によって、子ども同士がどのように刺激を受けあうかという点が研究の中心になっていた。そこで、ここでは別の観点，つまりその多様な解法自体をどうやって引き出すかという点に着目し、多様な解法を引き出す数学的手法を指導内容として取り込んだ数学教材の開発を行い、児童生徒の数学に対する学習観の転換へつなげたいと考えた（中込・諏訪田・黒木2004，中込・黒木2014，中込2016）。

(3) 研究の方法

まず多様な解法を引き出す数学的手法として、

1. 宮城学院女子大学教育学部教育学科児童教育専攻

「対の関係」や「特殊と一般の関係」に着目する方法を、具体例を通して押さえる。

「対の関係」とは、上と下、右と左、内と外、プラスとマイナスのような関係のことを指している。例えば「△ABCにおいて、AB<ACならば∠C<∠Bである」ことを証明するとき、図1［方法01］のようにAB=ADとする場合（r<r+q=s=p<p+qよりr<p+q）と、図2［方法02］のようにAC=ADとする場合（r<r+s=q<q+s=pよりr<p）を考えることができるが，このようなとき［方法01］と［方法02］の解法は「対の関係」にあるという。

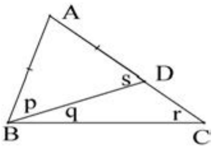

図1［方法01］

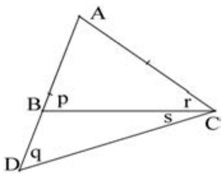

図2［方法02］

また「特殊と一般の関係」における「一般の解法」とは、「任意の」というニュアンスを含んだ解法のことを指している。例えば上記の証明問題において図3［方法03］のように点Pを辺AC上の任意の点としてAP=ADとした場合（r<r+s=t=q<q+s=pよりr<p）を考えても証明することができるが、ここでこの点PをAB=APとなる位置まで移動させた場合が［方法01］、AC=APとなる位置まで移動させた場合が［方法02］であると捉えることができる。つまり［方法01］［方法02］は［方法03］の特殊な場合、逆に［方法03］は［方法01］［方法02］を一般化した場合と考えられる。このようなとき［方法01］［方法02］と［方法03］の解法は「特殊と一般の関係」にあるという。[2)]

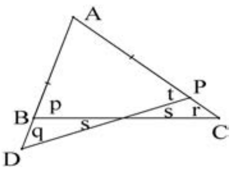

図3［方法03］

また、多様な解法を関係付けた関連図を示すことにより解法間の関係を構造的に把握することができる。例えばこの［方法01］［方法02］［方法03］を関連図で示すと次のようになる。「対の関係」を点線で、「特殊と一般の関係」を矢印で表している。

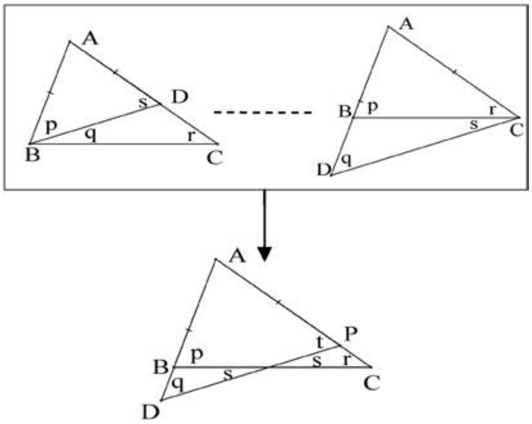

図4［解法の関連図］

本論文では、このような「対の関係」や「特殊と一般の関係」に着目することをもとにして、「チェバの定理」を題材として取り上げ、多様な解法を引き出す教材として開発する。つまり従来の「チェバ定理を証明せよ」という問題文の後半を「いろいろな方法で証明せよ」と変えて、多様な解法を見出す数学的手法を獲得させることを指導内容として取り込んだ教材として位置付け、多様な解法を構造的に関連付けて見出す。

2. チェバの定理の証明方法

チェバの定理をいろいろな方法で証明することを検討する。

【チェバの定理】
下図のように、△ABCの頂点A,B,Cと、三角形の辺上またはその延長上にない点Oを結ぶ各直線が、対辺BC,CA,ABまたはその延長と交わるとき、交点を、それぞれP,Q,Rとすると、
$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$が成り立つ。

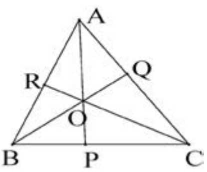

図5

(1) 三角形の面積を用いた解法

教科書等によく出てくるのは、以下のことを既知として三角形の面積を用いた解法1のような証明方法である。[3)]

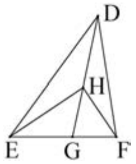

図6

図6において、EG：GF=△EHD：△FHDが成り立つ。

【解法1】

下図において、

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=\frac{\triangle ABO}{\triangle ACO}\cdot\frac{\triangle BCO}{\triangle BAO}\cdot\frac{\triangle CAO}{\triangle CBO}=1$$

となる。

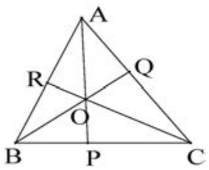

図7

(2) 平行線と比の関係を用いた解法 その1

以下のことを既知として、平行線と比の関係や三角形の相似を用いた証明方法を考える。

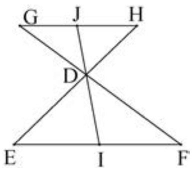

図8

図8において、GH//EFである。このとき、EI：HJ=ID：JD, FI：GJ=ID：JDであるから、EI：HJ=FI：GJ、よって、EI：FI=HJ：GJが成り立つ。

次に示す図9を使った解法は、高等学校の教科書に載っていたものである。

【解法2】

下図のように頂点Aを通りBCに平行な直線と直線BQ, CRとの交点をそれぞれS, Tとすると、BP：PC=SA：AT, △CQB∽△AQS, △BRC∽△ARTとなるので、

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=\frac{AS}{AT}\cdot\frac{BC}{AS}\cdot\frac{AT}{BC}=1$$

となる。

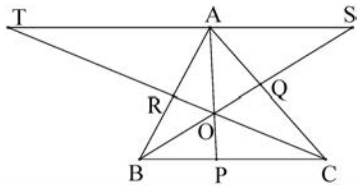

図9

解法2と「対の関係」にある解法として、以下の解法3や解法4を見出すことができる。

【解法3】

下図のように頂点Bを通りCAに平行な直線と直線CR, APとの交点をそれぞれS, Tとする。(証明略)

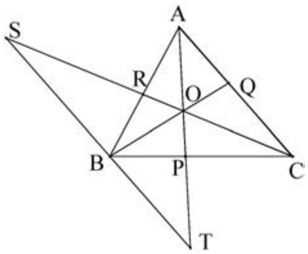

図10

【解法4】

下図のように頂点Cを通りABに平行な直線と直線AP, BQとの交点をそれぞれS, Tとする。(証明略)

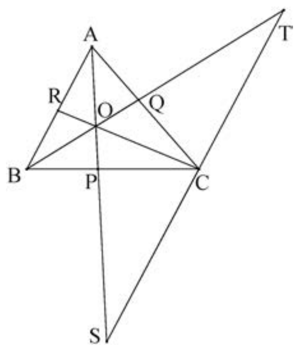

図11

解法2～4は構造的に同じものであり1つの解法と捉えるのが妥当であるが、このように「対の関係」として「特殊な解法」を意図的に見出しておくことによって、それらを関係付けてさらにそ

から「一般の解法」を見出すことにつなげられる場合がある。例えば、この解法2～4の「特殊な解法」を関係付けることによって、次の解法5のような「一般の解法」を見出すことができる。また、「対の関係」を学ぶ段階にある生徒にとっては、解法2～4のように「対の関係」にある解法をあえて区別して示すことで、そのことの意識化を図ることができる。

(3) 平行線と比の関係を用いた解法 その2

以下のことを既知として、平行線と比の関係や三角形の相似を用いた証明方法を考える。

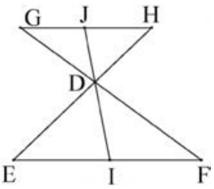

図12

図12において、GH//EFである。このとき、EI：HJ=ED：HD, EF：HG=ED：HDであるから、EI：HJ=EF：HG、よって、EI：EF=HJ：HGが成り立つ。

ここで図5の△ABCにおいて、頂点A, B, Cを通る3本の平行線（任意）を考えると、解法2はそれらの平行線が辺BCに平行になった場合、解法3は辺CAに平行になった場合、解法4は辺ABに平行になった場合と捉えることができるので、これら解法2～4の「特殊な解法」を関係付けることによって、次の解法5のような「一般の解法」を見出すことができる.

【解法5】（解法2～4の一般化）

下図は頂点A, B, Cを通る任意の平行線3本と直線AP, BQ, CRとの交点をU, W, S, X, T, Vとしたものである。このとき、△BPU∽△CPW, △CQX∽△AQS, △ART∽△BRVとなるので、

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=\frac{BU}{CW}\cdot\frac{CX}{AS}\cdot\frac{AT}{BV}$$
$$=\frac{BU}{BV}\cdot\frac{CX}{CW}\cdot\frac{AT}{AS}$$
$$=\frac{AS}{ST}\cdot\frac{ST}{AT}\cdot\frac{AT}{AS}=1$$

となる。

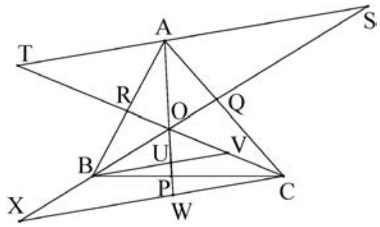

図13

解法5は解法2～4という「特殊な解法」を関係付けることから「一般の解法」として見出したが、逆に「一般の解法」から「特殊な解法」を見出すこともできる。例えば解法5において、頂点A, B, Cを通る3本の平行線が、線分APに平行な場合、線分BQに平行な場合、線分CRに平行な場合を考えていくと、それぞれにおいて、次の示す解法6～8のような「特殊な解法」を見出すことができる。

(4) 平行線と比の関係を用いた解法 その3

以下のことを既知として、平行線と比の関係や三角形の相似を用いた証明方法を考える。

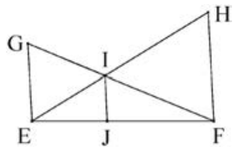

図14

図14において、EG//IJ//HFである。このとき、EJ：JF=EI：IH, EG：FH=EI：IHであるから、EJ：JF=EG：FHが成り立つ。

【解法6】

下図のように頂点B,Cを通りAPに平行な直線と直線BQ, CRとの交点をS, Tとすると、BP：PC=BT：CS, △CQS∽△AQO, △ARO∽△BRTとなるので、

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=\frac{BT}{CS}\cdot\frac{CS}{AO}\cdot\frac{AO}{BT}=1$$

となる。

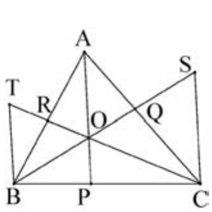

図15

解法6と「対の関係」にある解法として、以下

の解法7や解法8を見出すことができる。

【解法7】

下図のように頂点C, Aを通りBQに平行な直線と直線CR, APとの交点をS, Tとする。(証明略)

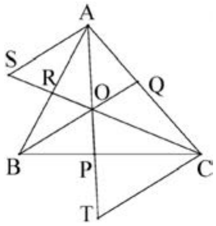

図16

【解法8】

下図のように頂点A, Bを通りCRに平行な直線と直線AP, BQとの交点をS, Tとする。(証明略)

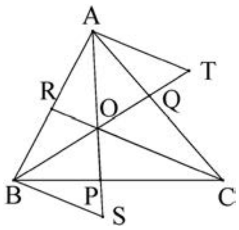

図17

以上のことから解法2〜4・解法6〜8と解法5は「特殊と一般の関係」にある解法として捉えることができる。これらの解法の関連図は次のように表現できる。

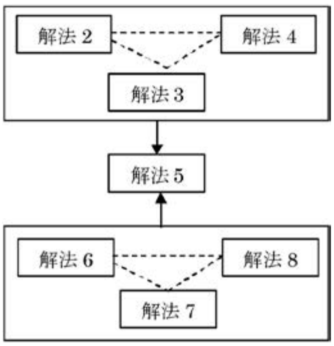

図18［解法の関連図1］

ところで解法6〜8は、三角形の各頂点を通る3本の平行線が線分AP, BQ, BRとそれぞれ平行な特殊な場合として見出したが、この解法6〜8で用いた補助線を重ね書きしたものが次の図19である。この図19をもとにさらに多様な解法を考えてみる。

(5) 平行線と比の関係を用いた解法 その4

図19は各頂点を通り直線AP, BQ, CRに平行な直線を引いたものである。

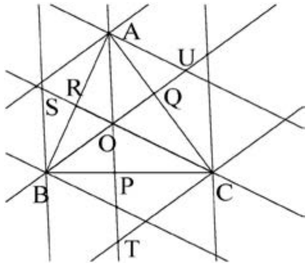

図19

解法6では各頂点を通る3直線が直線APに平行な場合における頂点B, Cを通る2直線を補助線として用いたが，3直線から選ぶ2直線の組合せとして、例えば頂点B, Aを通る2直線(図19における直線BS, AP)を補助線として選んだ場合をヒントとして考えていくと、△BOSと△TCOに着目した解法9や△BOSと△OUAに着目した解法10等を見出すことができる。

【解法9】

下図のように頂点Bを通りAPに平行な直線と直線CRとの交点をS、頂点Cを通りBQに平行な直線と直線APとの交点をTとすると、BP：PC=SO：OC, CQ：QA=TO：OA, △ARO∽△BRS, △BOS∽△TCOとなるので、

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=\frac{OS}{CO}\cdot\frac{OT}{AO}\cdot\frac{AO}{BS}$$
$$=\frac{BS}{OT}\cdot\frac{OT}{AO}\cdot\frac{AO}{BS}=1$$

となる。

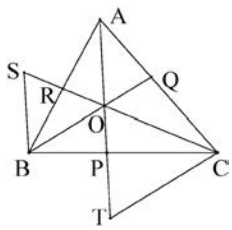

図20

解法9と「対の関係」にある解法として、以下の解法10や解法11を見出すことができる。

【解法10】
下図のように頂点Aを通りCRに平行な直線と直線BQとの交点をU、頂点Bを通りAPに平行な直線と直線CRとの交点をSとする。（証明略）

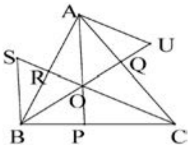

図21

同様に考えて，頂点C, Aを通る2直線（図22における直線CX, AP）を補助線として選んだ場合を考えていくと、△COXと△WBOに着目した解法11や△COXと△OVAに着目した解法12等を見出すことができる。

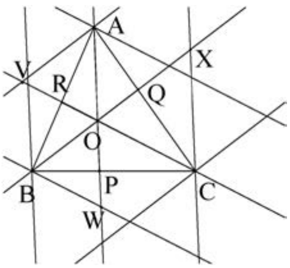

図22

【解法11】
下図のように頂点Bを通りCRに平行な直線と直線APとの交点をW、頂点Cを通りAPに平行な直線と直線BQとの交点をXとすると、BP：PC=BW：CO, △CQX∽△AQO, AR：RB＝AO：OW, △BOW∽△OXCとなるので、

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=\frac{BW}{CO}\cdot\frac{CX}{AO}\cdot\frac{AO}{OW}$$
$$=\frac{OW}{CX}\cdot\frac{CX}{AO}\cdot\frac{AO}{OW}=1$$

となる。

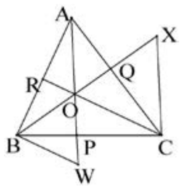

図23

【解法12】
下図のように頂点Cを通りAPに平行な直線と直線BQとの交点をX、頂点Aを通りBQに平行な直線と直線CRとの交点をVとする。（証明略）

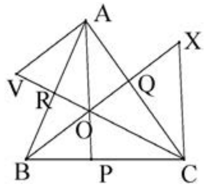

図24

さらに同様に補助線とする2本の平行線の組合せを考えて、解法9〜12と重複しない2つの三角形に着目すると、次の解法13と解法14を見出すことができる。

【解法13】
下図のように頂点Cを通りBQに平行な直線と直線APとの交点をT、頂点Aを通りCRに平行な直線と直線BQとの交点をUとする。（証明略）

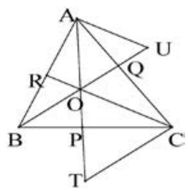

図25

【解法14】
下図のように頂点Aを通りBQに平行な直線と直線CRとの交点をV、頂点Bを通りCRに平行な直線と直線APとの交点をWとする。（証明略）

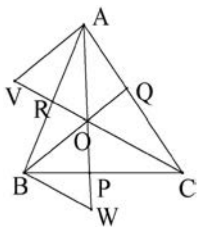

図26

これらの解法の関連図は次のように表現できる。

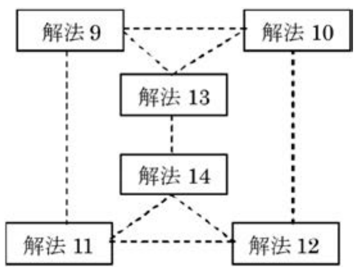

図27［解法の関連図2］

解法9〜14は図19と図22にある三角形の組合せをもとに見出した解法になっているが、さらに他の三角形の組合せに着目していくと、隣り合った三角形に用いた解法15〜17のような解法を見出すことができる。

【解法15】

下図のように頂点Aを通りBQに平行な直線と直線CRとの交点をV、頂点Bを通りAPに平行な直線と直線CRとの交点をSとすると、BP：PC＝OS：OC, CQ：QA＝CO：OV, △ARV∽△BRO, △AVO∽△BOSとなるので、

$$
\begin{aligned}
\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}&=\frac{OS}{CO}\cdot\frac{CO}{OV}\cdot\frac{AV}{BO}\\
&=\frac{OS}{CO}\cdot\frac{CO}{OV}\cdot\frac{OV}{OS}=1
\end{aligned}
$$

となる。

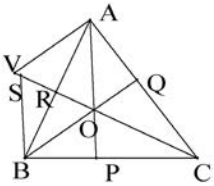

図28

【解法16】

下図のように頂点Bを通りCRに平行な直線と直線APとの交点をW、頂点Cを通りBQに平行な直線と直線APとの交点をTとする。（証明略）

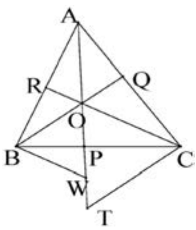

図29

【解法17】

下図のように頂点Cを通りAPに平行な直線と直線BQとの交点をX、頂点Aを通りCRに平行な直線と直線BQとの交点をUとする。（証明略）

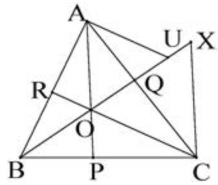

図30

これらの解法の関連図は次のように表現できる。

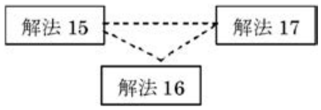

図31［解法の関連図3］

(6) 平行線と比の関係を用いた解法 その4

その他の解法を考えてみる。例えば図32のように各頂点から直線AP, BQ, CRに垂線を下ろして幾組かの相似な直角三角形をつくると、これらの辺の比に着目して次の解法18を見出すことができる。

【解法18】

下図のように頂点B, Cから直線APに垂線をおろし、その足をそれぞれS, Tとする。頂点C, Aから直線BQに垂線をおろし、その足をそれぞれU, Vとする。頂点A, Bから直線CRに垂線をおろし、その足をそれぞれW, Xとする。このとき、△BPS∽△CPT, △CQU∽△AQV, △ARW∽△BRX, △BOS∽△AOV, △COT∽△AOW, △COU∽△BOXとなるので、

$$
\begin{aligned}
\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}&=\frac{BS}{CT}\cdot\frac{CU}{AV}\cdot\frac{AW}{BX}\\
&=\frac{BS}{AV}\cdot\frac{CU}{BX}\cdot\frac{AW}{CT}\\
&=\frac{BO}{AO}\cdot\frac{CO}{BO}\cdot\frac{AO}{CO}=1
\end{aligned}
$$

となる。

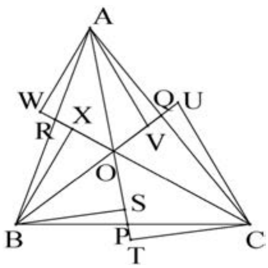

図32

ここで解法18を一般化できないか、つまり垂

直という特殊な条件をはずせないか考えてみる。この図32において、BS//CTであることに注目して相似な三角形とその辺の比に着目する。すると次の解法19のような解法を見出すことができる。解法18と解法19は「特殊と一般の関係」にあるといえる。

【解法19】（解法18の一般化）
図33のように直線AP上に任意の点Sをとり、頂点Cを通りBSに平行な直線と直線APとの交点をTとする。直線BQ上に∠BSO＝∠CUOとなる点Uをとり、頂点Aを通りCUに平行な直線と直線BQとの交点をVとする。直線CR上に∠BSO＝∠AWOとなる点Wをとり、頂点Bを通りAWに平行な直線と直線CRとの交点をXとする。さらに図34のように直線AP, BQ, CR上にそれぞれCT=CT’, AV=AV’, BX=BX’となるような点T’, V’, X’をとる。このとき、△BPS∽△CPT, △CQU∽△AQV, △ARW∽△BRX, △BOS∽△AOV’, △COU∽△BOX’, △AOW∽△COT’となるので、

$$\begin{aligned}\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}&=\frac{BS}{CT}\cdot\frac{CU}{AV}\cdot\frac{AW}{BX}\\&=\frac{BS}{AV'}\cdot\frac{CU}{BX'}\cdot\frac{AW}{CT'}\\&=\frac{BO}{AO}\cdot\frac{CO}{BO}\cdot\frac{AO}{CO}=1\end{aligned}$$

となる。

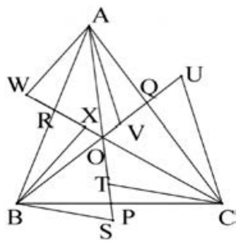

図33

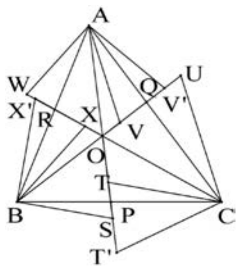

図34

ここでもこの解法19をもとにして「特殊な解法」を見出すことができる。例えば解法19における点Sと点Pが重なった場合やBS//OCとなった場合を考えると、次の解法20や解法21のような特殊な場合の解法を見出すことができる。解法20や解法21をもとにして「対の関係」から、さらにそれぞれに別の解法を見出すこともできるが割愛する。

【解法20】
下図のように直線BQ上に∠BPO＝∠CUOとなる点Uをとり、頂点Aを通りCUに平行な直線と直線BQとの交点をVとする。直線CR上に∠BPO=∠AWOとなる点Wをとり、頂点Bを通りAWに平行な直線と直線CRとの交点をXとする．さらに直線AP, BQ, CR上にそれぞれCP=CT’, AV=AV’, BX=BX’となるような点T’, V’, X’をとる。(証明略)

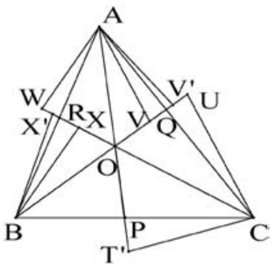

図35

【解法21】
下図のように直線AP上にOC//BSとなる点Sをとる。直線BQ上に∠BSO＝∠CUOとなる点Uをとり、頂点Aを通りCUに平行な直線と直線BQとの交点をVとする。直線CR上に∠BSO＝∠AWOとなる点Wをとり、頂点Bを通りAWに平行な直線と直線CRとの交点をXとする。さらに直線AP, BQ, CR上にそれぞれCO=CT’, AV=AV’, BX=BX’となるような点T’, V’, X’をとる。（証明略）

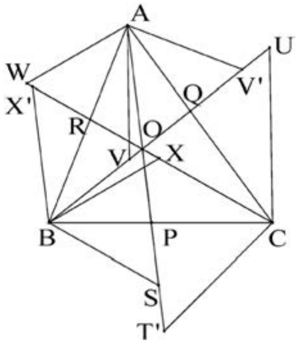

図36

これらの解法の関連図は次のように表現できる。

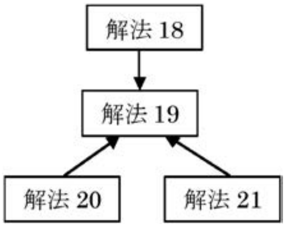

図37［解法の関連図4］

次頁に解法2～21の関連図を図38［チェバの定理解法の関連図］として掲載し、さらに最後の頁において、解法2～21の「対の関係」や「特殊と一般の関係」がわかりやすいように、図で示した関連図も図39［チェバの定理 図で示した関連図］として載せておいた。

3. まとめ

「対の関係」や「特殊と一般の関係」に着目して解法を関係付けながら新たな解法を見出していくという数学的手法は、多様な解法を引き出す上で有効であるということを「チェバの定理」の証明という数学教材を通して明らかにした。このような多様な解法を引き出す数学的手法を活用する活動は、「与えられた解法を覚える」のではなく、「自分のアイデアにこだわり既習事項を関係付けて自分なりの解法を見出していく」という姿勢を培い、児童生徒の数学に対する学習観の転換を図ることにつながると考える。さらにこうした数学教材を開発し、今後はその学習効果の検証に努めていきたいと考えている。

なお、ここで述べた数学的手法に関しては、数学者黒木伸明氏（上越教育大学名誉教授）から多くの示唆をいただいた。

註

1）筆者は高校1年生と大学1年生を対象に，数学の学習に関して「教科書などの例題の解法を暗記し、それを用いて問題を解くようにしている」かどうかをYES・NOで回答させる方式で調査した。（対象は東京都公立高等学校1年生74人、私立大学1年生50人で、それぞれ2002年11月、2016年7月に実施。）

高校生・大学生で「YES」とこたえた生徒・学生はそれぞれ93％と82％いた。このことからも、高校生・大学生の多くが「与えられた解法を覚え、それに数値等を当てはめて問題を解くのが数学の学習である」と捉えている様子がうかがえた。

2）小学校算数においても、例えば教科書「新しい算数小5下」（東京書籍平成28年度版pp.24-25）の「四角形の内角の和」において「特殊と一般の関係」にある解法が扱われている。

3）高等学校の教科書「数学A」に掲載されている「チェバの定理」の証明は、多くが【解法1】であるが、他にも【解法2】（平成12年度用の旺文社）や本論文では取り上げていないが「メネラウスの定理」を利用した解法（平成6,14,19年度用の啓林館、平成7年度用の学校図書、平成7年度用の旺文社）等も見られる。

引用・参考文献

古藤怜，1986年，学校数学における多様性とその指導，上越教育大学数学教室数学教育研究第1号，pp.1-9

古藤怜・新潟算数教育研究会，1990年，算数科多様な考えの生かし方まとめ方，東洋館出版社，pp.7-40

相馬一彦，1992年，多様な見方や考え方と指導法，日本数学教育学会誌，第74巻第9号，pp.2-10

中込雄治・諏訪田文男・黒木伸明，2004年，数学的性質の関連付けについて，数学教育学会誌，Vol.44 No.1・2，pp.73-82

中込雄治・黒木伸明，2014年，幾何教材の発展的な扱いについて―文系の学生に身につけさせたい数学的素養―，数学教育学会誌臨時増刊2014年度春季年会発表論文集，pp.64-66

中込雄治，2016年，多様な解法を引き出す数学教材の研究，宮城学院女子大学発達科学研究 №.16，pp.13-22

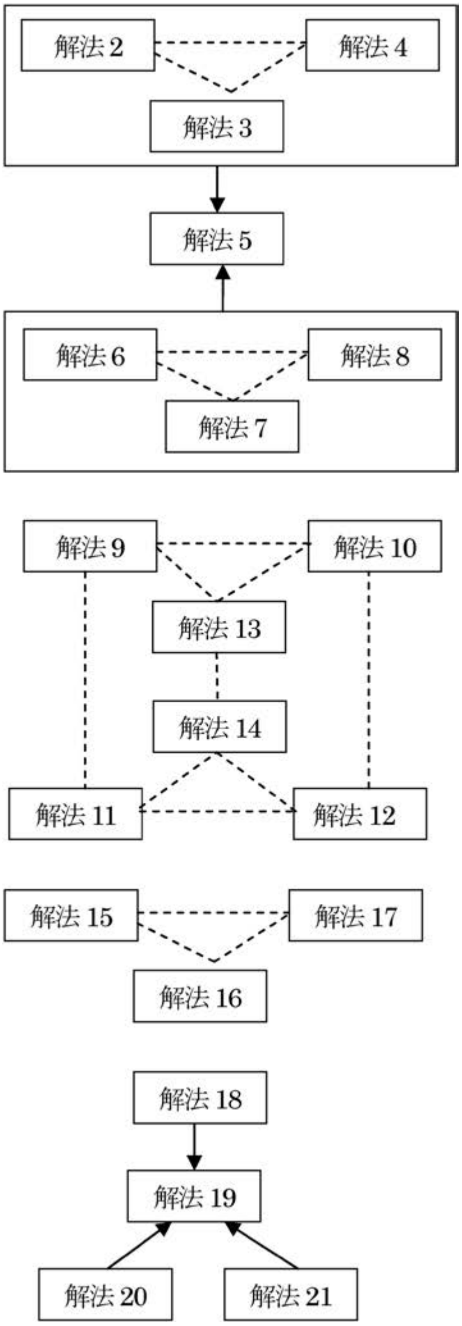

図38［チェバの定理　解法の関連図］

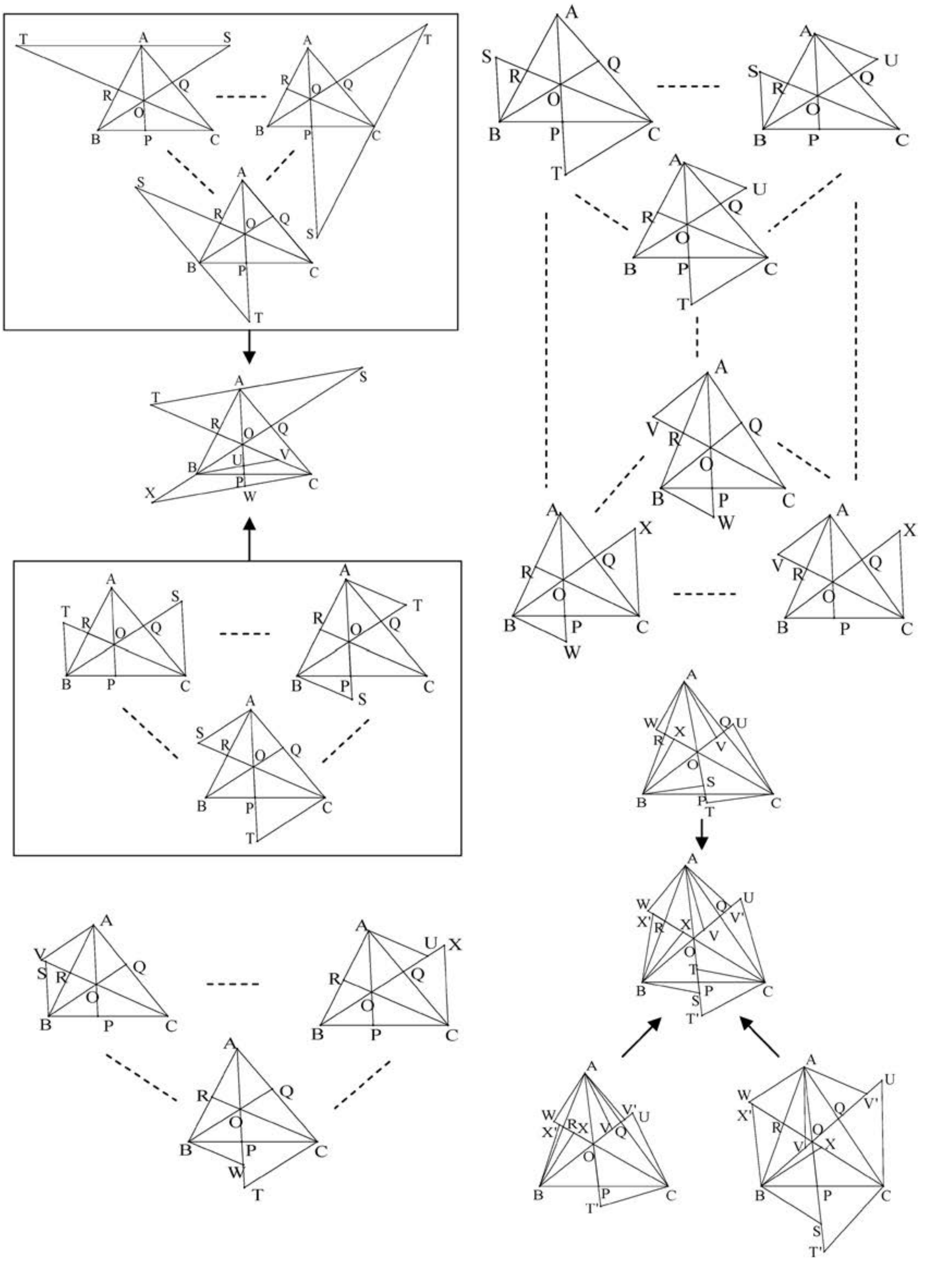

図39［チェバの定理　図による解法の関連図］