宮城学院女子大学発達科学研究
2016. 16. 13-22

多様な解法を引き出す数学教材の研究

中　込　雄　治[1]

現在、多くの児童生徒が算数・数学の学習活動を「与えられた解法を覚えてそれに数値を当てはめて問題を解く」活動であると捉えている実態がある。数学的課題に主体的に取り組む児童生徒を育成するためには、こうした閉塞的な学習観を払拭することが必要である。児童生徒自身に「既習事項を関係付けて自分なりの解法を見出していく」創造的な活動として数学の学習を捉えさせること、つまり数学の学習観の転換を図ることが喫緊の課題である。そのためには、児童生徒にまず多様な解法の存在を示し、さらにそれらを見出す数学的手法を習得させることが重要であり、そうした数学教材の開発が求められている。ここではこうした教材開発の題材として高校数学で扱う「メネラウスの定理」を取り上げ、その開発方法を明らかにした。

Keywords：数学の学習観、多様な解法を引き出す数学的手法、メネラウスの定理

1. はじめに

数学的課題に対して、より主体的に取り組む児童生徒を育成するためには、児童生徒自身が数学の学習活動を創造的な活動として捉えていることが必要である。しかし多くの児童生徒が「解法は覚えるものでそれに数値を当てはめて問題を解くのが数学の学習である」という数学に対する閉塞的な学習観に囚われているのが実態である。長年にわたり、学力低下や活用力不足が指摘されているが、こうした数学に対する閉塞的な学習観がその根底に深く横たわっているという背景がある。現在「活用」という観点を強調し[1)]、教科書の章末問題が解ける力に加えて、その単元で登場する定理や公式を導き出せる力の育成が注目されている。しかしそれら定理や公式の証明は教科書に掲載されているため、このような閉塞的な学習観で取り組もうとすると、勢い、その掲載されている証明を覚えればよいのだと勘違いしかねない危惧がある。

したがってこうした学習観を払拭するとともに、「既習事項を関係付けて自分なりの解法を見出していくのが数学の学習である」という創造的な活動として数学の学習を捉えさせること、つまり数学の学習観の転換を図ることが喫緊の課題である。そのためには、児童生徒に次のことを実感させることのできる教材を開発することが求められる。

(1) 多様な解法の存在が確認できる教材
(2) 多様な解法を見出すための数学的手法が獲得できる教材

多様な解法の存在を示し、それらを見出す数学的手法を習得させることによって、自分なりに考えて解法を見出していこうとする姿勢を培い、創造的な活動として数学の学習を捉えさせ、学習観の転換を図っていく。

ここでの「多様な解法を見出すための数学的手法」とは、解法間の「対の関係」や「特殊と一般の関係」に着目させるという方法のことを指す。この方法を活用すると、多様な解法の存在が確認できたり、１つの定理に対してもそれを導く多くの解法(証明方法)を見出すことができたりするようになる。例えば、高校数学「数学A」にある「メネラウスの定理」「チェバの定理」をこの「多様な解法を引き出す教材」として開発して「いろいろな証明方法」を考えさせると、それぞれ20以上の証明方法を見出すことができるようになる(ここでは「任意の」というニュアンスを含む補

1. 宮城学院女子大学学芸学部児童教育学科

助線により一般化された証明も1つとしてカウントしている)[2)]。

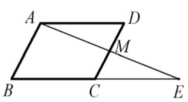
これまで「多様な解法」に関する研究は、「多様な考え方」の研究の一部として行われてきた(古藤(1986)(1990)、相馬(1992))。そこでは、多様な解法を引き出すこと自体の重要性は強調されてきたが、すでに結果として児童生徒から出されたいくつかの解法について、それらをどのように分類したりまとめたりするかという点が研究の中心となっており、またそうした分類やまとめの活動によって子ども同士が刺激を受け合う様子に目が向けられていた。つまりどのような数学的手法に着目させれば児童生徒自身がより多くの多様な解法を見出すことができるようになるか、そうした点における研究が十分ではなかった。したがって多様な解法を見出す数学的手法を取り込んだ数学教材を開発することは、児童生徒に数学の学習を創造的な活動として捉えさせるために喫緊の課題となっているのである。

2. 多様な解法を引き出す数学的手法

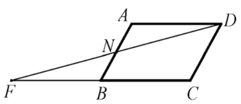
まず多様な解法を引き出す数学的手法として、「対の関係」や「特殊と一般の関係」に着目する方法を具体例を通して押さえる。

「対の関係」とは、上と下、右と左、内と外、プラスとマイナスのような関係のことを指している。例えば「平行四辺形を三角形に等積変形する」という課題に対して、[方法01]のように平行四辺形ABCDの右側の辺DCの中点Mを通る線分AEを1辺とする△ABEと、[方法02]のように左側の辺ABの中点Nを通る線分DFを1辺とする△DFCを考えることができるが、このようなとき[方法01]と[方法02]を「対の関係」にあるという。

[方法01]

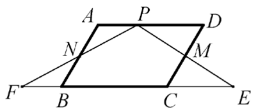


[方法02]



また「特殊と一般の関係」における一般の解法とは、「任意の」というニュアンスを含んだ解法のことを指している。例えば上記の課題において[方法03]のように辺AD上に任意の点Pをとり、辺DC,ABの中点M,Nと結んで△PFEをつくっても△PFEと平行四辺形ABCDの面積は等しくなるが、ここでこの点Pを頂点Aまで移動させた場合が[方法01]であり、頂点Dまで移動させた場合が[方法02]であると捉えることができる。つまり[方法01][方法02]は[方法03]の特殊な場合、逆に[方法03]は[方法01][方法02]を一般化した場合と考えられる。このようなとき[方法01][方法02]と[方法03]を「特殊と一般の関係」にあるという。

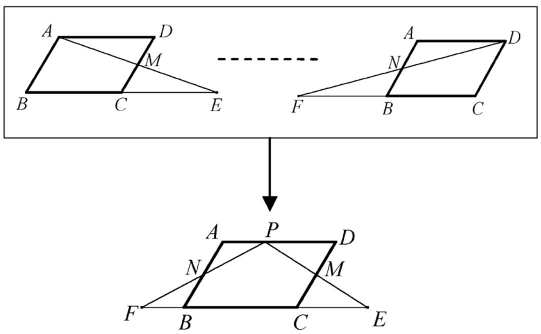
[方法03]



一般化を考えていくときの方法はいろいろあるが、条件を緩めるというのもその1つの方法である。例えば「2点A,Mを通る直線」に対して「1点Mを通る直線」は条件を緩めた直線となる。他にも長方形に対して平行四辺形は条件を緩めた図形とみなすことができる。

また、多様な解法を関連付けた関連図を示すことにより解法間の構造的な関係を把握することができる。関連図では、「対の関係」を点線で、「特殊と一般の関係」を矢印で表すことにする。例えば前述の[方法01][方法02][方法03]を関連図で示すと次のようになる。

[解法の関連図01]



3. メネラウスの定理

図形の基本的な定理に関しては、多くの場合そ

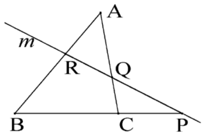
の証明方法において多様な解法が考えられる。高等学校で学ぶ「数学A」の単元「平面図形」の中に登場する「メネラウスの定理」も多様な解法が考えられる定理である。ここではこの定理を多様な解法を引き出す教材として開発する。つまり教師が事前に多様な解法を構造的に関連付けて見出しておき、従来の「メネラウスの定理を証明せよ」という問題文の後半を「いろいろな方法で証明せよ」と変えて、多様な解法を見出す数学的手法を獲得させることにねらいを置いた教材として位置付けるのである。

実はこの教材は、埼玉大学理学部数学科2年生28名の学生を対象に「数学科教育法」の授業を行ったときにも扱っている。授業では、多様な解法を引き出す数学的手法を解説した後に「メネラウスの定理をいろいろな方法で証明せよ」という課題を宿題として出しておいた。授業は2015年11月12月に3日間の集中講義という形で1日目と2日目は土日で連続して行われ、少し間をおいた土曜日に3日目が行われた。宿題は1日目の終わりに出し2日目の午前に回収したので、学生には考える時間が一晩しかなかったが、「対の関係」「特殊と一般の関係」に着目しながら多くの解法を見出し、中には解法の関連図まで示している学生も見受けられた。2日目の午後には実際に学生から出された解法も含めて多様な解法(証明方法)を授業で紹介した。ここではそのときの学生の反応などにも触れながら、メネラウスの定理の多様な証明方法の見出し方を明らかにする。

【メネラウスの定理】

下図のように、△ABCの辺BC,CA,ABまたはその延長が、三角形の頂点を通らない直線mと、それぞれ点P,Q,Rで交わるとき、

$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$　　が成り立つ。



3-1. 三角形の面積を用いた解法

以下のことを既知として、三角形の面積を用いた証明方法を考えてみる。

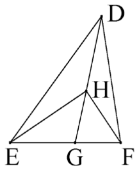


図01

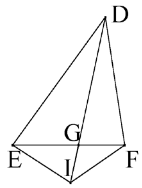


図02

図01において、EG:GF = △EHD:△FHD
図02において、EG:GF = △EID:△FID
が成り立つ。

これらを用いると以下の解法1,2のような証明方法を見出すことができる。

【解法1】

下図のように線分AP,BQを引くと、

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=\frac{\triangle BQP}{\triangle CQP}\cdot\frac{\triangle CQP}{\triangle QAP}\cdot\frac{\triangle QAP}{\triangle BQP}=1$$

となる。

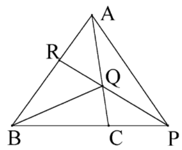


図1

【解法2】

下図のように線分AP,CRを引くと、

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=\frac{\triangle BRP}{\triangle CRP}\cdot\frac{\triangle CRP}{\triangle RAP}\cdot\frac{\triangle RAP}{\triangle BRP}=1$$

となる。

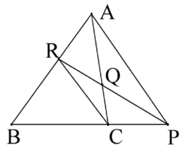


図2

この解法1,2を両方思いついた学生は多数いたが、この2つの解法を特殊と捉えて、一般化された解法を見出すところまでに至った学生はいなかった。しかし次の解法3のように考えると一般化することができる。この解法3を授業で紹介したとき、学生達から「おぉ」というどよめきが起き、解法1,2をどうやって結びつけるかを興味津

津でうかがっていた様子が伝わってくるとともに、こうした場面が知的感動を呼び起こすことを、学生達の反応から改めて確認することができた。

【解法3】（解法1,2の一般化）
下図のように線分QR上に任意の点Tをとると、

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=\frac{\triangle BTP}{\triangle CTP}\cdot\frac{\triangle CTP}{\triangle TAP}\cdot\frac{\triangle TAP}{\triangle BTP}=1$$

となる。

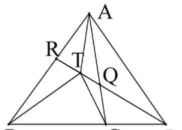


図3

解法3において、任意の点Tが点Qと重なった場合が解法1、点Rに重なった場合が解法2と捉えることができ、解法1,2と解法3は「特殊と一般の関係」にあるといえる。さらにこの任意の点が直線PRのどの位置にあるか、その場合分けによって次の解法4,5,6が見出される。

【解法4】（解法1,2の一般化）
下図のように直線PR上に点Sをとる。証明略。

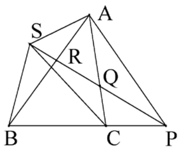


図4

【解法5】（解法1,2の一般化）
下図のように線分QR上に点Uをとる。証明略。

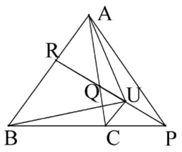


図5

【解法6】（解法1,2の一般化）
下図のように直線PR上に点Vをとる。証明略。

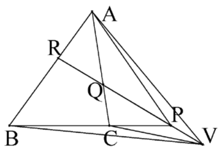
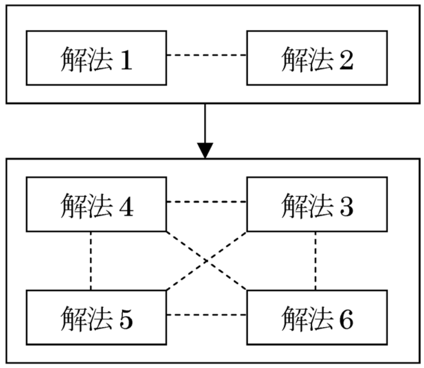


図6

ここで、解法1,2と解法3,4,5,6の間には「特殊と一般の関係」が成り立っている。同時に解法1と解法2は「対の関係」にあり、解法3,4,5,6もそれぞれに任意の点が線分内や線分外にあることから「対の関係」にあるので、これらの解法の関連図は以下のように表現できる。

［解法の関連図1］



3-2. 平行線と比の関係を用いた解法

以下のことを既知として、平行線と比の関係や三角形の相似を用いた証明方法を考えてみる。

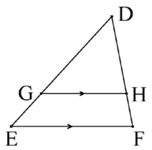


図03

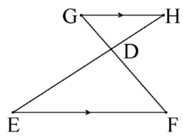


図04

図03,04ともに、GH//EFである。このとき、
図03において、ED:DG＝FD:DH＝EF:GH
図04において、EH:HD＝FG:GD
が成り立つ。

これらを用いると解法7のような証明方法を見出すことができる。

【解法7】
下図のように頂点A,B,Cから直線PRに垂線を下ろし、その足をそれぞれS,T,Uとすると、AS//BT//CUであるから、△BTP∽△CUP，△CUQ∽△ASQ，△ASR∽△BTRとなるので、

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=\frac{BT}{CU}\cdot\frac{CU}{AS}\cdot\frac{AS}{BT}=1$$

となる。

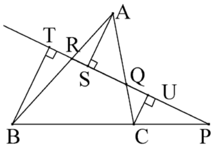


図7

　解法7を考えた学生も多数いた。解法7では垂線を用いて補助線を引いているが、証明過程を見ると垂線に依存していないので、解法7を一般化した次の解法8を見出すことができる。解法7,8両方を見出した学生もおり、その学生はこれらの解法の関連図も作成していた。

【解法8】(解法7の一般化)
下図のように頂点A,B,Cを通る3本の平行線と直線PRとの交点を，それぞれS,T,Uとすると、AS//BT//CUであるから、△BTP∽△CUP，△CUQ∽△ASQ，△ASR∽△BTRとなるので、

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=\frac{BT}{CU}\cdot\frac{CU}{AS}\cdot\frac{AS}{BT}=1$$

となる。

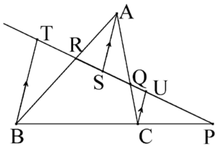


図8

　このとき解法8における3本の平行線は任意であるから、これらが辺ABと平行になった場合、辺ACと平行になった場合、辺BCと平行になった場合をそれぞれ考えると、次の解法9,10,11のような特殊な場合の解法を見出すことができる。

【解法9】(解法8の特殊な場合)
下図のように頂点Cを通り辺ABに平行な直線と直線PRとの交点をUとする。証明略。

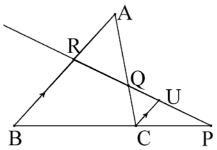


図9

【解法10】(解法8の特殊な場合)
下図のように頂点Bを通り辺ACに平行な直線と直線PRとの交点をTとする。証明略。

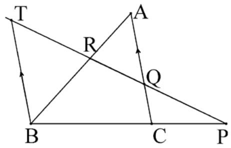


図10

【解法11】(解法8の特殊な場合)
下図のように頂点Aを通り辺BCに平行な直線と直線PRとの交点をSとする。証明略。

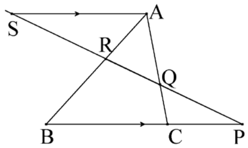
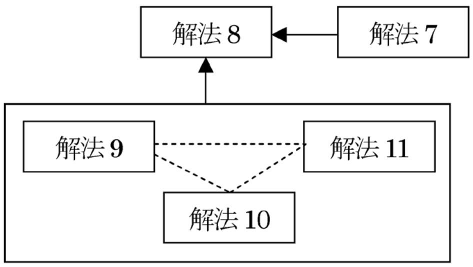


図11

　このように一般の場合の解法をもとに特殊な場合の解法を見出すこともできる。またここで解法9,10,11はそれぞれに「対の関係」にあり、解法7,9,10,11と解法8は「特殊と一般の関係」にあるので、これらの解法の関係は以下のような関連図で表現できる。

［解法の関連図2］



　さらに解法8において、点Sが点Pに重なった場合、点Uが点Rに重なった場合、点Tが点Qに重なった場合をそれぞれ考えると、次の解法12,13,14のような特殊な場合の解法を見出すこともできる。

【解法12】(解法8の特殊な場合)
下図のように頂点B,Cを通り線分APと平行な直線と直線PRの交点をそれぞれT,Uとする。証明略。

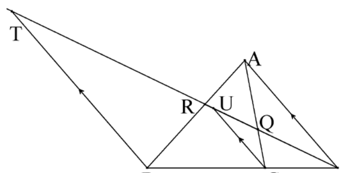


図12

【解法13】(解法8の特殊な場合)

下図のように頂点A,Bを通り線分CRと平行な直線と直線PRの交点をそれぞれS,T とする。証明略。

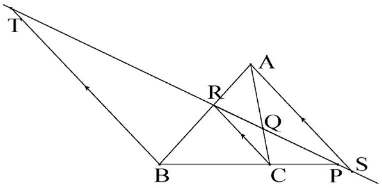


図13

【解法14】(解法8の特殊な場合)

下図のように頂点A,Cを通り線分BQと平行な直線と直線PRの交点をそれぞれS,Uとする。証明略。

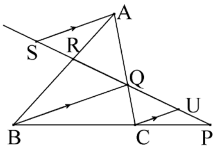
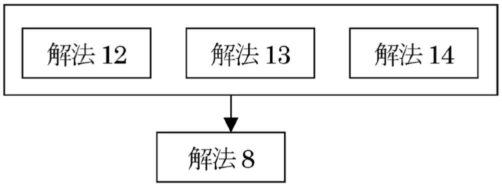


図14

解法8と解法12,13,14の関係は以下のような関連図で表すことができる。

［解法の関連図3］



他にも、例えば解法8における平行線が直線PRに平行な場合からヒントを得て、そのとき点C,B,Aを通るそれぞれの直線に着目すると、次の解法15,16,17を見出すことができる。

【解法15】

下図のように頂点Cを通り直線PRと平行な直線と辺ABとの交点をUとすると、CU//PRであるから、BP:PC＝BR:RU, CQ:QA＝UR:RAとなるので、

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=\frac{BR}{RU}\cdot\frac{UR}{RA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

となる。

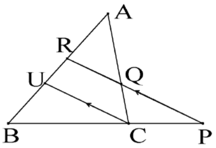


図15

【解法16】

下図のように頂点Bを通り直線PRと平行な直線と直線ACとの交点をTとする。証明略。

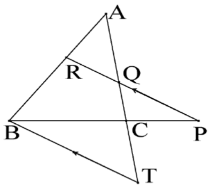


図16

【解法17】

下図のように頂点Aを通り直線PRと平行な直線と直線BCとの交点をSとする。証明略。

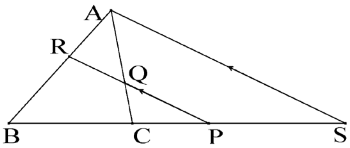


図17

ここで解法15,16,17を特殊な場合を考え関連付けると、これらを一般化した次のような解法を見出すことができる。

【解法18】(解法15,16,17の一般化)

下図のように任意の直線nと直線PRとの交点をVとし、頂点A,B,Cを通り直線PRと平行な3本の直線と直線nとの交点をそれぞれS,T,Uとすると、AS//BT//CU//PVであるから、BP:PC＝TV:VU, CQ:QA＝UV:VS, AR:RB＝SV:VTとなるので、

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=\frac{TV}{VU}\cdot\frac{UV}{VS}\cdot\frac{SV}{VT}=1$$

となる。

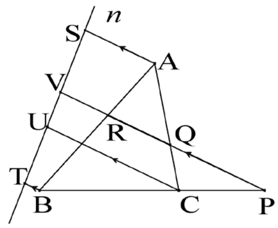


図18

解法18において、直線nが直線ABに一致したものが解法15、直線ACに一致したものが解法16、直線BCに一致したものが解法17と捉えることができる。また解法18において直線nが直線CRに重なった場合、直線APに重なった場合をそれぞ

れ考えると、次の解法19,20のような解法を見出すことができる。

【解法19】（解法18の特殊な場合）
下図のように頂点A,Bを通り直線PRと平行な2本の直線と直線CRとの交点をそれぞれS,Tとする。
証明略。

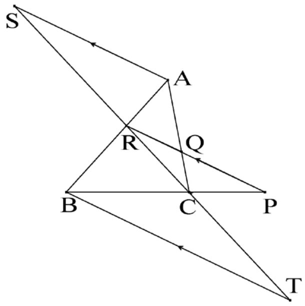


図19

【解法20】（解法18の特殊な場合）
下図のように頂点B,Cを通り直線PRと平行な2本の直線と直線APとの交点をそれぞれT,Uとする。
証明略。

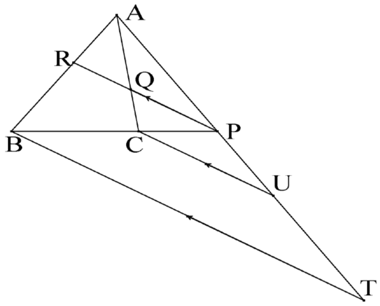
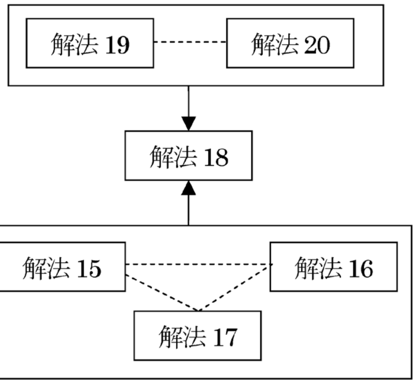


図20

ここで解法15,16,17もそれぞれに「対の関係」にあり、解法15,16,17と解法18は「特殊と一般の関係」にある。また解法19と解法20は「対の関係」であり、解法19,20と解法18は「特殊と一般の関係」にある。したがってこれらの関係は以下のような関連図として表すことができる。

［解法の関連図4］



このように、特殊な場合の解法15～17を結びつけるものとして一般の解法18を見出したり、一般の解法18における任意の直線nを特定の線分に重ねることによって特殊な場合の解法19,20を見出したりすることもできるのである。

特殊な解法や一般の解法を見出すときの発想のしかたとしては、例えば次のようなケースを考えることができる。

・1つの頂点を通る直線
・1つの辺に平行な直線
・1つの辺に垂直な直線
・2つの頂点を通る直線
・辺の中点を通る直線　　など。

4. 学生が見出した解法

実は埼玉大学の「数学科教育法」の授業用に筆者が用意した多様な解法は、上記の解法1～20までであった。次の解法21は、学生が解法15,16を一般化する形で見出した解法である。授業ではこの解法を紹介し、さらにこれをもとに場合分けをした解法22～25を合わせて確認した。このように学生と共同して解法を見出すことも、多様な解法を見出す数学的手法の奥深さ故の醍醐味であるといえる。

【解法21】（解法15,16,17の一般化）
下図のように直線PRと平行な任意の直線nと直線BP,AC,ABとの交点をそれぞれS,T,Uとすると、

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=\left(\frac{BP}{PS}\cdot\frac{PS}{PC}\right)\cdot\left(\frac{CQ}{QT}\cdot\frac{QT}{QA}\right)\cdot\frac{AR}{RB}$$

$$=\left(\frac{RB}{RU}\cdot\frac{QT}{QC}\right)\cdot\left(\frac{CQ}{QT}\cdot\frac{RU}{RA}\right)\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

となる。

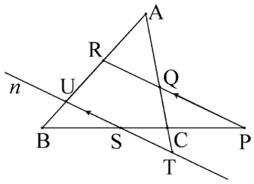


図21

この解法は、直線PRと平行な任意の直線nを引く位置によって場合分けができる．解法22～25は場合分けした解法である。

【解法22】

下図のように直線PRと平行な任意の直線nと直線BP,AC,ABとの交点をそれぞれS,T,Uとする。証明略。

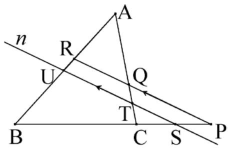


図22

【解法23】

下図のように直線PRと平行な任意の直線nと直線BP,AC,ABとの交点をそれぞれS,T,Uとする。証明略。

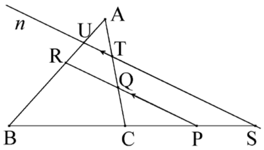


図23

【解法24】

下図のように直線PRと平行な任意の直線nと直線BP,AC,ABとの交点をそれぞれS,T,Uとする。証明略。

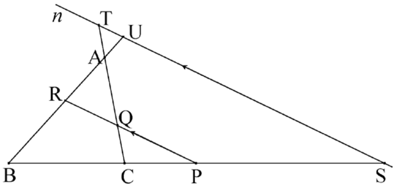


図24

【解法25】

下図のように直線PRと平行な任意の直線nと直線BP,AC,ABとの交点をそれぞれS,T,Uとする。証明略。

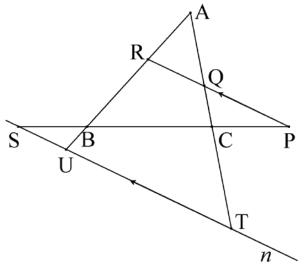
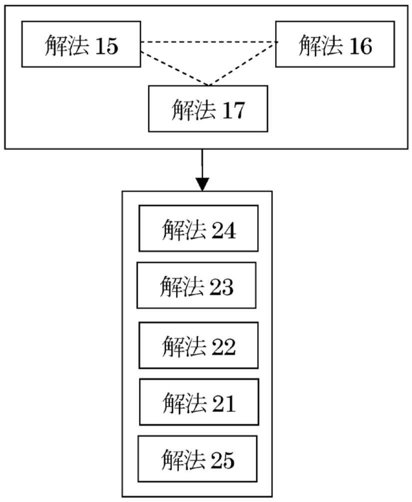


図25

この一般の場合の解法21～25に対して解法15～17は特殊な場合の解法になるので、これらの関連は次の関連図で表すことができる。

［解法の関連図5］



次頁に解法1～25までの関連図を［メネラウスの定理 解法の関連図］として掲載し、さらに最後の頁において、解法1～25の「対の関係」や「特殊と一般の関係」がわかりやすいように，図で示した関連図も［メネラウスの定理 図による解法の関連図］として載せておいた。図で示しておくと、任意の点の動きなどがイメージしやすくなり、多様な解法を引き出す数学的手法の理解を深めることができる。

5. まとめ

「対の関係」や「特殊と一般の関係」に着目して解法を関連付けながら新たな解法を見出してい

くという数学的手法は、多様な解法を引き出す上で大変有効であるということを「メネラウスの定理の証明」という数学教材を通して明らかにした。多様な解法を引き出す数学的手法を活用する活動は、「与えられた解法を覚えてそれに数値を当てはめて問題を解く」という活動とは対極をなしており、「既習事項を関係付けて自分なりの解法を見出していく」という姿勢を培うことにつながり、児童生徒の数学に対する学習観の転換を図るものと考えられる。今後もこうした教材の開発に努めていきたいと考えている。

なお、ここで述べた数学的手法に関しては、数学者黒木伸明氏(上越教育大学名誉教授)から多くの示唆をいただいた。

註

1) 中央教育審議会初等中等教育分科会教育課程部会(第43回)配付資料、資料5-1「算数・数学科の現状と課題、改善の方向性(検討素案)」(http://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/chukyo/chukyo3/004/siryo/06082203/006.htm)など参照。
2) 小学校算数においても、例えば教科書「新しい算数 小5下」(東京書籍平成28年度版pp.24-25)の「四角形の内角の和」において「特殊と一般の関係」にある解法が扱われている。

参考文献

古藤怜，1986年，学校数学における多様性とその指導，上越教育大学数学教室数学教育研究第1号，pp.1-9

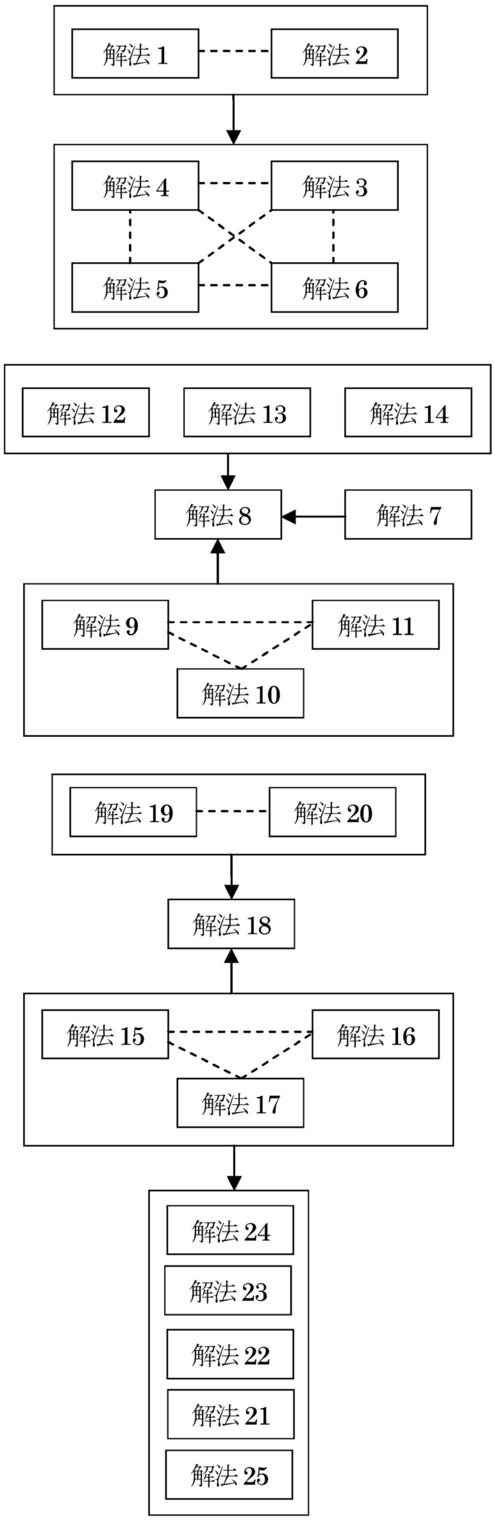
古藤怜・新潟算数教育研究会，1990年，算数科多様な考えの生かし方まとめ方，東洋館出版社，pp.7-40

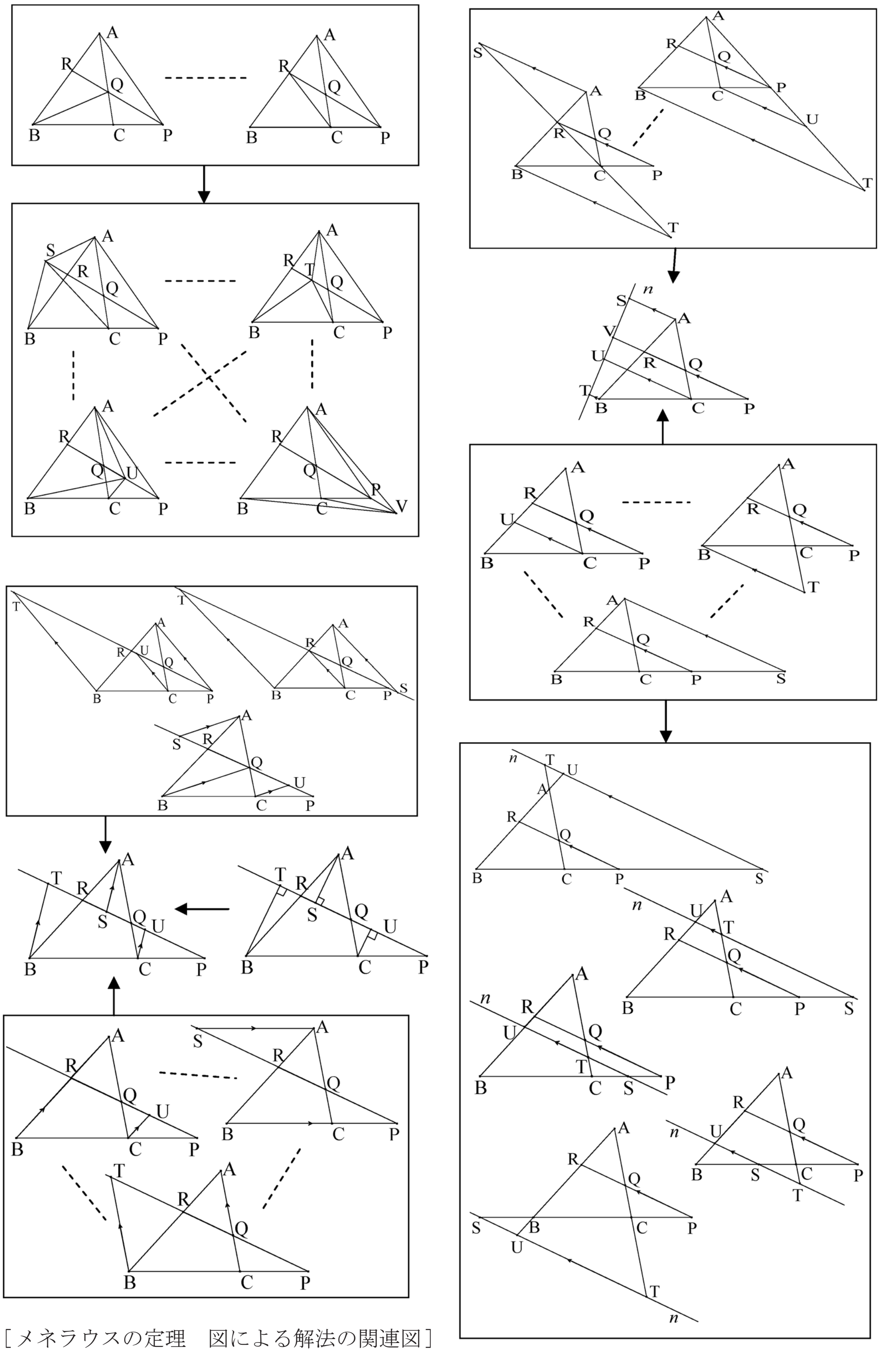
相馬一彦，1992年，多様な見方や考え方と指導法，日本数学教育学会誌，第74巻第9号，pp.2-10

中込雄治・黒木伸明，2003年，多様な考え方を引き出し特殊と一般の構造を見いだす幾何教材の開発，数学教育学会誌，Vol.43 No.3･4 pp.27-35

中込雄治・諏訪田文男・黒木伸明，2004年，数学的性質の関連付けについて，数学教育学会誌，Vol.44 No.1･2 pp.73-82

［メネラウスの定理　解法の関連図］





［メネラウスの定理　図による解法の関連図］