宮城学院女子大学発達科学研究
2019. 19. 54-64

四角形から正三角形への等積変形について

中　込　雄　治[1]
黒　木　伸　明[2]

中学校までの学習内容を基にすれば、任意の四角形を三角形に等積変形したり、さらに三角形を長方形や正方形に等積変形したりすることができる。ここでは、正方形と等積な正三角形を作図する方法なども検討し、「どんな四角形も正三角形に等積変形できる」という数学的に美しい性質の教材化を試みた。一般の四角形を等積変形していき、多くの既習事項を活用しながら正方形や正三角形という特殊な形にする作図方法に着目し、その体系化を図ることにより、教材化できることを明らかにした。

Keywords：等積変形、積の平方根の作図、1：2の内分点の作図

1. はじめに

任意の四角形が三角形に、三角形が長方形に、等積変形できることは、中学2年までの学習内容である。等積変形の方法は様々ある。

例えば、図1の四角形ABCDにおいて、点Dを通り対角線ACに平行な直線と直線BCとの交点をEとするとき、△ACD=△ACEより、四角形ABCD=△ABEとなる（中込「1」）。

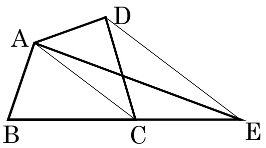


図1　四角形を三角形に等積変形

また、図2の△ABCにおいて、AB, ACの中点をそれぞれD, Eとし、点B, A, Cから直線DEに垂線BF, AG, CHを下したとき、△ADG≡△BDF, △AEG≡△CEHより、△ABC=長方形FBCHとなる。

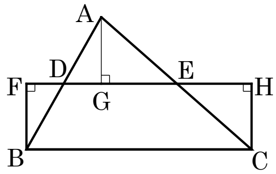


図2　三角形を長方形に等積変形

1. 宮城学院女子大学教育学部
2. 上越教育大学名誉教授

さらに、中学3年までの学習内容を基にすると、長方形を正方形に等積変形することもできる。

例えば、AB=a, BC=bの長方形ABCDの面積はabである。したがって、この長方形と等積な正方形の一辺の長さは$\sqrt{ab}$となるから、これは与えられた長さa, bから$\sqrt{ab}$を作図する問題に帰着できる。図3の長方形ABCDにおいて、AB=a, BC=bとする。ADの延長上にED=DCとなる点Eをとり、AEの中点をMとする。CDの延長上にPM=MAとなる点Pをとる。このとき、直角三角形PMDに三平方の定理を適用して、$PD^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a+b}{2}-b\right)^2=ab$を得る。すなわち、PD=$\sqrt{ab}$なので、長方形ABCD=正方形PDRQとなる（坂井「2」）。

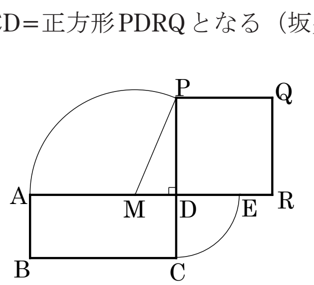


図3　長方形を正方形に等積変形

このPD=$\sqrt{ab}$は、図4のように、直角三角形の相似関係、△APE∽△ADP∽△PDEに着目すれば、△ADPと△PDEの辺の比の関係、AD：PD=PD：DEを基にして、a：PD=PD：bから求める

こともできる（このことは3節の【既習事項1】のところでも触れる）。

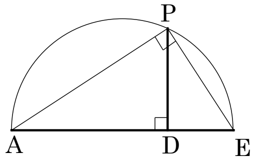


図4　積の平方根の作図

ここでは、さらに正方形と等積な正三角形を作図する方法も検討し、「どんな四角形も正三角形に等積変形できる」という数学的に美しい性質の教材化を試みる。一般の四角形を等積変形していき、多くの既習事項を活用しながら正方形や正三角形という特殊な形にする作図方法に着目し、その体系化を図ることにより、教材化できることを明らかにする。

2. 同じ面積の図形に対する印象

図5にある図形は（い）の四角形を等積変形したものである。（あ）は長方形、（う）は正三角形、（お）は正方形である。

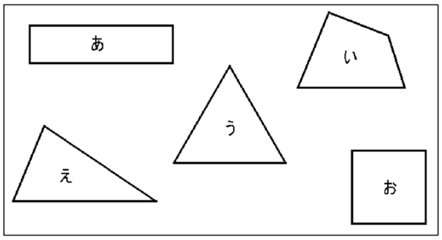


図5　学生に提示した図

小学校の教員を目指す学生にこの図5を見せ、面積の大小関係における印象を調査した（宮城学院女子大学学芸学部児童教育学科4年生の授業「教職実践演習」の中で30名の学生を対象に2019年1月10日に実施）。

図5を印刷した紙片を学生に配付し、面積が一番大きいと感じる図形を尋ねたところ、（あ）を挙げた者が0名、（い）12名、（う）12名、（え）2名、（お）1名、他に「すべて同じに見える」という者が3名、という結果を得た。百分率で表すと、次表1のようになる。四角形（い）と正三角形（う）を挙げた者が多かった。

表1　面積が一番大きいと感じる図形

図	あ	い	う	え	お	同じ
%	0%	40%	40%	7%	3%	10%

この後学生には「実はすべて（い）の四角形を等積変形してかいたものである」ことを告げ、等積変形していく方法を図形ソフトなども使って示した。以下は学生が綴ったこの授業に対する感想である。

A. パッと見ると違う大きさの図形が、実は同じ大きさの図形で驚いた。多くの考えを知っていることで指導に深みが出ると思った。
B. 図形のみかけで面積が違って見えるのが面白いと思った。子どもたちの興味関心をひきつけるのではないかと思う。
C. これらの図形がすべて同じ面積のようには見えなかったので、等積変形していると知って、面白いと思いました。自分でも作ってみたいと思います。
D. 形を変形させるだけで面積が違って見えるのが不思議です。
E. 1つの形が正三角形にもなるのが面白いと思いました。作ってみたいです。いろいろ試してみたいです。
F. 1つの図形を変形して別の図形にしていくのが面白いなと思いました。図形の素材を多様にとらえて、もっと考える幅を広げていきたいと思いました。
G. 四角形が正方形や正三角形に変形されたときは、思わず「うぉぉ」と声が出ました。子どもたちも食いついてくれると思うし、子どもの中には、ここから数学にドハマリする子どももいるんじゃないのかなと思いました。こういう知識もたくさん持ちたいです。
H. 正方形が正三角形になった時は、感動した。
I. 図形ソフトで等積変形するのが面白かったです。自分でもやってみたいと思いました。

J.　正方形と同じ面積の三角形を作ることができることに驚きました。

K.　一見異なって見える面積の図形も、実は同じ面積であることが証明できるのは面白いです。

L.　数学にはある種の美しさがあると思うが、それを小学生などの幼い段階で気付かせることができたら、数学に自主的に取り組む児童生徒が増えるのではないかと感じた。

M.　図形ならではの面白さを感じました。子どもたちにも、このような面白さや不思議さ、分かった時の喜びを感じさせたいと思います。

N.　私は、数学に対する苦手意識が強いのですが、今日のように、よく見るとすべて面積が同じ！というような秘密に気付けると一気に関心がわきました。図形に対する見方・考え方を豊かにしておくことで、子どもたちの多様な考えにも対応できると思ったので、これから、もっと教材研究を深めたいです。

こうした感想から、見場の違いへの意外性や驚き、どんな四角形も正方形や正三角形という特殊な形へと等積変形できることの面白さが、学生の興味関心を引き出していることが確認できた。同時に、教員志望の学生たちなので、子どもを指導する観点からも、このような題材が児童生徒の興味関心を引き出し、図形に対する理解を深める教材となり得ることを示唆する指摘（B, F, G, L, M, Nの下線部）も読み取れる。また、こうした学生の反応から、この題材を扱うときの導入例として、図5のようなものを提示する方法も効果的であるとわかった。

3. 正方形を正三角形に等積変形する

ここでは、正方形を正三角形に等積変形する方法を検討してみる（中込「3」、河村「4」）。

(1)「正方形→正三角形」その1

まず、【既習事項1】と【既習事項2】を押さえ、続いて正方形を正三角形に等積変形する［作図の考え方］と［作図手順］を示す。

【既習事項1】（積abの平方根$\sqrt{ab}$の作図）

図6は$AB=a$，$BC=b$で、ACを直径とする半円上に$DB \perp AC$となる点Dをとったものである。このとき、$DB=\sqrt{ab}$となっている（理由は図4のところで既述）。

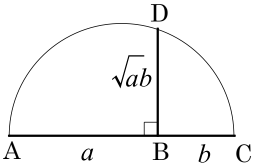


図6　積の平方根の作図

このことを使うと、一般の三角形と等積な正方形の作図が容易になる。図7のように、底辺$BC=a$，高さ$AD=h$の△ABCにおいて、BCの延長上に$EC=AD$となる点Eをとり、BCの中点をFとする。線分EFの中点をGとして、点Gを中心に半径GEの円をかき、その円周上に$HC \perp EF$となる点Hをとると、線分CHを一辺とする正方形HCJIは△ABCと等積の正方形となる（△ABCの面積は$\frac{1}{2}ah$であるので、等積な正方形の一辺の長さは$\sqrt{\frac{1}{2}ah}$となるが、図7において$EF=\frac{1}{2}a+h$であるから、$HC=\sqrt{\frac{1}{2}ah}$となっている）。

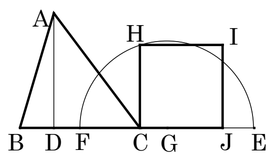


図7　三角形を正方形に等積変形

【既習事項2】（線分を1：2に内分する点の作図）

線分を3等分するには、線分を1：2に内分する点を決めればよいが、それには三角形の重心を利用した次のような方法がある。

図8のように、線分ABにおいて点Aが中点となるような任意の線分CDを引き、BCの中点をMとし、DMとABの交点をPとする。このとき点Pは△CBDの重心となっているから、AP：PB=1：2となる。[1)]

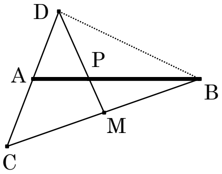


図8　線分を1：2に内分する点

［作図の考え方］

一辺の長さがaの正方形の面積はa^2である。一辺の長さがxの正三角形の高さは$\frac{\sqrt{3}}{2}x$であるから、その面積は$\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$と表される。この正三角形と正方形の面積が等しいとすると$\frac{\sqrt{3}}{4}x^2=a^2$となるので、$x=\sqrt{\frac{4}{3}a\times\sqrt{3}a}$を得る（$x=\frac{2}{\sqrt[4]{3}}a$であるが、【既習事項1】を活用するために、あえて$x=\sqrt{\frac{4}{3}a\times\sqrt{3}a}$という形にしている）。したがって、一辺の長さが$a$の正方形と等積の正三角形の一辺の長さは、長さが$\frac{4}{3}a+\sqrt{3}a$の線分をつくれば【既習事項1】を活用して求めることができる。またこのときの$\frac{4}{3}a$の長さは【既習事項2】を活用して求めることができる。

［作図手順］

一辺の長さがaの正方形ABCDを基にした作図方法の一例を示す。

①図9のように、CDの延長上にED=DCとなる点Eをとり、点Cを中心に半径CEの円をかき、直線ADとの交点をFとする（△DCFは辺の比が、1：2：$\sqrt{3}$の直角三角形なので、DF=$\sqrt{3}a$となる）。

②BAの延長上にGA=ABとなる点Gをとり、BDの中点Hと結び、線分HGと辺ADとの交点をIとして、直線DA上にJA=AIとなる点Jをとる（点HはBDとACとの交点としてとることができる。AI：ID=1：2となっているので、JD=$\frac{4}{3}a$である）。

③JFの中点Kを中心として半径KFの円をかき、直線CDとの交点をLとする（DLが正三角形の一辺の長さになっている）。

④点D, Lを中心に半径DLの円をかき、2円の交点をMとして、△LDMをかく（この△LDMが求める正三角形である）。

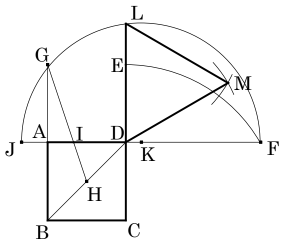


図9　正方形を正三角形に等積変形

(2)「正方形→正三角形」その2

まず、【既習事項3】と【既習事項4】を押さえ、続いて［作図の考え方］と［作図手順］を示す。

【既習事項3】（$\frac{1}{\sqrt[4]{3}}a$の作図）

図10のように、AB=aの正方形ABCDにおいて、BCの延長上に、EB=BCとなる点Eをとる。ABの延長上に、FC=ECとなる点Fをとる。このとき、△FECは正三角形である。FCの中点をGとし、EGとFBの交点をHとする。このとき、点Hは正三角形FECの重心となるから、BH：HF=1：2であり、BH=$\frac{\sqrt{3}}{3}a=\frac{1}{\sqrt{3}}a$となる。

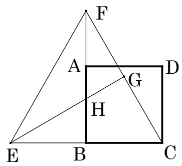


図10　線分の作図

続いて図11のように、点Hを通りBCに平行な直線とCDとの交点をIとする。HIの延長上に

JI=ICとなる点Jをとると、HJ=$a+\frac{1}{\sqrt{3}}a$であるから、ここで【既習事項1】を活用すると、IK=$\frac{1}{\sqrt[4]{3}}a$を作図することができる。[2]

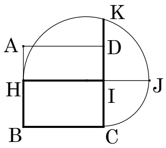


図11　線分の作図

【既習事項4】（正方形を分割して三角形化）

図12のように、正方形ABCDのAB,CDの中点をE,Fとし、辺BC上に任意の点Pをとり、点Fを通り線分EPに平行な直線と辺ADとの交点をQとする。線分EP上に任意の点Rをとり、点F,Qと結ぶ。

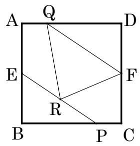


図12　正方形の分割

このとき、四角形AERQ, CFRP, DQRFと△BEPをうまく組み合わせると、これらを使って1つの三角形をつくることができる。図13はこれらを色分けしたものである。

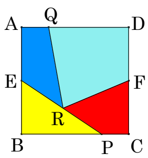


図13　正方形の分割

図14は、四角形AERQを点Qに関して点対称移動させ、四角形CFRPを点Fに関して点対称移動させ、△BEPをまず点Eに関して点対称移動させてさらに点Qに関して点対称移動させたものである。したがって、△R’RR”は正方形ABCDを等積変形したものであるといえる。

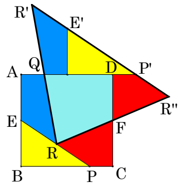


図14　正方形の分割と三角形化

実は図15のように、正方形ABCDとそれを点Fに関して点対称移動した正方形GHDCの2種の正方形を敷き詰めることによって、その中に等積変形された三角形が見出すことができる。

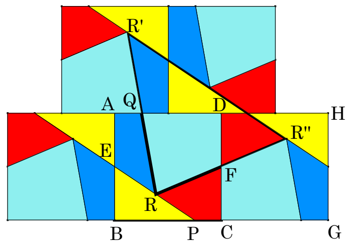


図15　正方形の分割と三角形化

［作図の考え方］

【既習事項4】の図12において、点P、Rは任意の点なので、これらの点をうまくとることによって、正方形と等積の正三角形をつくることができる。図14よりRR’=2RQ, RR”=2RF, R’R”=2EPであるから、△R’RR”が正三角形になるためには、図12においてRQ=RF=QF、つまり△FQRが正三角形であればよく、その一辺の長さは正方形と等積の正三角形の一辺の長さ$\frac{2}{\sqrt[4]{3}}a$の半分$\frac{1}{\sqrt[4]{3}}a$となる。そこで【既習事項3】を活用して、図16においてまずEP=$\frac{1}{\sqrt[4]{3}}a$となるように点Pをとる。このとき、QFの垂直二等分線とEPとの交点をRとすると、△FQRは正三角形になる。

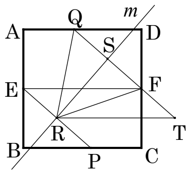


図16　正方形の分割

正三角形であることの示し方はいろいろあるが、例えば図16において、△QRSが辺の比1：2：$\sqrt{3}$の直角三角形になっていれば、つまりSRの長さが$\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt[4]{3}}a$、有理化すると$\frac{\sqrt[4]{3}}{2}a$であれば、△FQRは正三角形であるといえる。点Rを通り辺BCに平行な直線と直線QFとの交点をTとして、平行四辺形ERTFと長方形EBCFに注目するとRT=EF=BCであるとわかる。また△BPEと△STRは直角三角形で∠BPE=∠STRであるから、△BPE∽△STRとなるので、BE：EP=SR：RT、つまり、$\frac{1}{2}a：\frac{1}{\sqrt[4]{3}}a$=SR：$a$であるから、SR=$\frac{\sqrt[4]{3}}{2}a$を得る。ゆえに、△FQRは正三角形となる。

［作図手順］

①図17のように、一辺の長さがaの正方形ABCDの辺ABの中点をEとし、EP=$\frac{1}{\sqrt[4]{3}}a$となる点Pを辺BC上にとり、辺CDの中点をFとし、点Fを通りEPと平行な直線と辺ADとの交点をQとする（ここでのEPの長さ$\frac{1}{\sqrt[4]{3}}a$は【既習事項3】の図11で得た線分IKを使う）。[3)]

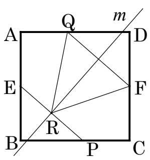


図17　正方形の分割

②線分FQの垂直二等分線mとEPとの交点をRとする（このとき、△FQRは正三角形となる）。

③図18のように、正方形ABCDを分割し、四角形AERQを点Qに関して点対称移動し、四角形FRPCを点Fに関して点対称移動し、△EBPを点Eに関して点対称移動してさらに点Qに関して点対称移動することで、図19のように、正方形ABCDと等積な正三角形R’RR’’をつくることができる。

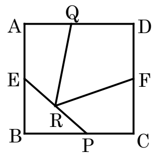


図18　正方形の分割

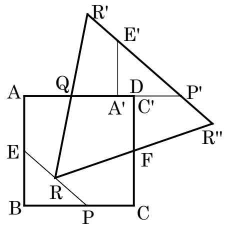
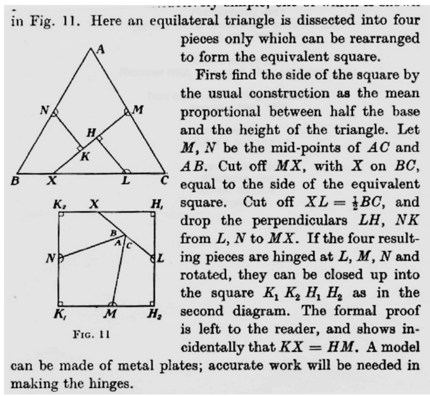


図19　正方形の分割と正三角形化

4. 正三角形を正方形に等積変形する

図20は文献「5」のp.24からの抜粋である。


in Fig. 11. Here an equilateral triangle is dissected into four pieces only which can be rearranged to form the equivalent square.

First find the side of the square by the usual construction as the mean proportional between half the base and the height of the triangle. Let M, N be the mid-points of AC and AB. Cut off MX, with X on BC, equal to the side of the equivalent square. Cut off $XL = \frac{1}{2}BC$, and drop the perpendiculars LH, NK from L, N to MX. If the four resulting pieces are hinged at L, M, N and rotated, they can be closed up into the square $K_1 K_2 H_1 H_2$ as in the second diagram. The formal proof is left to the reader, and shows incidentally that $KX = HM$. A model can be made of metal plates; accurate work will be needed in making the hinges.

図20　文献「5」からの抜粋

これは3節で考えた課題の逆の課題である。図21のように分割し、正三角形を正方形に等積変形する方法を、文献「5」をもとに解説する。

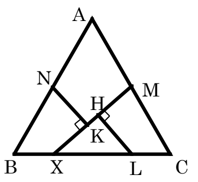


図21　正三角形の分割

文献「5」では、「Let M,N be the mid-points of AC and AB. Cut off MX, with X on BC, equal to the side of the equivalent square.」（図20の中段）とある。正三角形ABCの一辺の長さを1とすると、面積は$\frac{\sqrt{3}}{4}$であるから、この正三角形と等積な正方形の一辺の長さは、$\frac{\sqrt[4]{3}}{2}$となる。したがって、この課題を教材化するためには、図21において、MX=$\frac{\sqrt[4]{3}}{2}$をどの様な方法で作図するか、具体的な議論が必要となる（図21のMXは、図19のQP’に対応していると見ることができる。図19において、QP’=A’P’+QA’=BP+PC=BCであるから、QP’は正方形の一辺の長さになっている）。

図22のように、一辺の長さが1の正三角形ABCの頂点BからACに垂線BMを下ろす。点Mを中心に半径MAの円をかき、辺ABとの交点をN、直線BMとの交点をDとする。BDを直径とする円Oと直線ACとの交点をSとする。このとき、△SDBは直角三角形になり、△SDM∽△BSMであるから、$MS^2=MD\cdot BM=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$、すなわち、MS=$\frac{\sqrt[4]{3}}{2}$となる（【既習事項1】を活用している）。

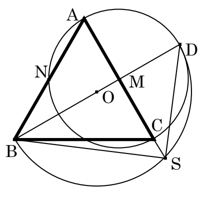


図22　線分の作図

図23のように、点Mを中心とする半径MSの円とBCとの交点をXとする。このとき、MX=$\frac{\sqrt[4]{3}}{2}$である。

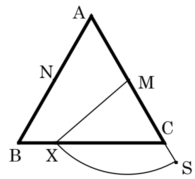


図23　線分の作図

図24のように、XC上にLX=CM$\left(=\frac{1}{2}\right)$となる点Lをとる。点L、NからMXに垂線LH、NKを下ろす（点NはABの中点である）。

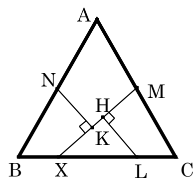


図24　正三角形の分割

図25のように、四角形MHLCを点Mに関して点対称移動し、四角形NBXKを点Nに関して点対称移動し、△LHXを点Mに関して点対称移動してさらに点L’に関して点対称移動する。このとき、四角形KH’H’’K’は正方形となる。

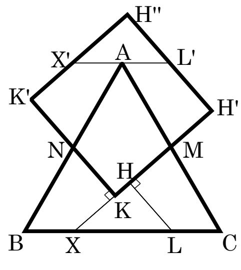


図25　正三角形の分割と正方形化

5. 三角形や長方形を正三角形に等積変形する

ここでは、一般の三角形や長方形を正三角形に等積変形する作図方法を検討する。

（1）**「三角形→正三角形」**

［作図の考え方］

底辺a高さhの三角形を等積変形して正三角形にしたとき、正三角形の一辺の長さをxとすると、$x^2=\frac{2}{3}a\times\sqrt{3}h$となるので、【既習事項1】を活用した次のような作図方法が考えられる。

［作図手順］

①図26のように、△ABCの辺ACの中点DとABの延長上にEB=BAとしてとった点Eを結び、辺BCとの交点をFとする（このとき、CF=$\frac{2}{3}$ABである）。

②点Cを通り辺BCに垂直な直線に、点Aから垂線AGを下ろし、直線CG上にHC=CGとなる点Hをとり、点Gを中心に半径GHの円をかき直線BCとの交点をIとする（このとき、CI=$\sqrt{3}$GCである）。

③線分FIの中点Jを中心として半径JFの円をかき直線CGとの交点をKとする。半径をCKとして点C, Kを中心にそれぞれ円をかき、その交点をLとすると、△KCLは△ABCと等積の正三角形になる。

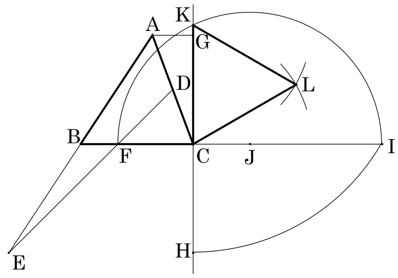


図26　三角形を正三角形に等積変形

（2）**「長方形→正三角形」**

［作図の考え方］

縦a横bの長方形を等積変形して正三角形にしたとき、正三角形の一辺の長さをxとすると、$x^2=\frac{4}{3}a\times\sqrt{3}b$となるので、【既習事項1】を活用した次のような作図方法が考えられる。

［作図手順］

①図27のように、長方形ABCDの対角線ACの中点EとABの延長上にFB=BAとしてとった点Fを結び、辺BCとの交点をGとし、BCの延長上にHB=BGとなる点Hをとる（点Eは2本の対角線の交点として求めることができる。このとき、CH=$\frac{4}{3}$BCである）。

②CDの延長上にIC=CDとなる点Iをとり、点Dを中心に半径DIの円をかき、直線BCとの交点をJとする（このとき、CJ=$\sqrt{3}$DCである）。

③線分HJの中点Kを中心として半径KJの円をかき直線CDとの交点をLとする。半径をCLとして点C, Lを中心にそれぞれ円をかき、その交点をMとすると、△LCMは長方形ABCDと等積の正三角形になる。

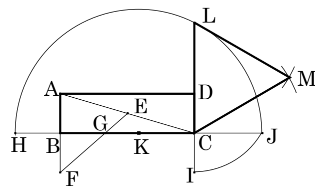


図27　長方形を正三角形に等積変形

6. 等積変形の体系

四角形を正三角形まで等積変形する作図方法を検討してきたが、その等積変形の流れを整理すると以下のような体系が見出される。

「四角形→三角形→長方形→正方形→正三角形」
「四角形→三角形→長方形→正三角形」
「四角形→三角形→正方形→正三角形」
「四角形→三角形→正三角形」

どの体系でもはじめに四角形を三角形に等積変形している。三角形は底辺の長さをa、高さをhとすれば面積は$\frac{1}{2}ah$と表すことができる。ここで、長方形の面積は縦の長さxと横の長さyの積xyで表せるので、この長方形が三角形と等積であるためには、$xy=\frac{1}{2}ah$が成り立つようなxとyの組み合わせを考えればよいことになる。そこで例

えば、$x=a, y=\frac{1}{2}h$として長方形をつくろうとすれば、図2で示したような長方形ができる。同様に、正方形の一辺の長さをxとすると、その面積はx^2と表せるので、この正方形が三角形と等積であるためには、$x^2=\frac{1}{2}ah$が成り立つようなxを考えればよいことになる。そこで、$x=\sqrt{\frac{1}{2}ah}$として正方形をつくろうとすれば、図7で示したような正方形ができる。

このように、2つの図形の面積の関係を等式で表すことができれば、それを基にして等積変形の手掛かりをつかむことができる。三角形と長方形、三角形と正方形、三角形と正三角形の面積の関係も等式で表すことができるので、まず四角形を三角形に等積変形しておくと、その後の見通しが立てられる。

また、それぞれの等積変形の場面において多くの既習事項を活用しているが、そこでは次のような数学の内容が用いられている。

「四角形→三角形」（図1）

平行線を使った三角形の等積変形。

「三角形→長方形」（図2）

合同な三角形をつくることによる等積変形。

「長方形→正方形」（図3）

積の平方根の作図（三平方の定理または相似な三角形の比を利用）を用いた等積変形。

「三角形→正方形」（図7）

積の平方根の作図を用いた等積変形。

「正方形→正三角形」（図9, 図19）

線分を1：2に内分する点の作図（三角形の重心の利用）、積の平方根の作図を用いた等積変形。正方形を分割して点対称移動した等積変形。

「三角形→正三角形」（図26）

線分を1：2に内分する点の作図（三角形の重心の利用）、積の平方根の作図を用いた等積変形。

「長方形→正三角形」（図27）

線分を1：2に内分する点の作図（三角形の重心の利用）、積の平方根の作図を用いた等積変形。

「正三角形→正方形」（図25）

正三角形を分割して点対称移動した等積変形（これは体系の中にはなく、そこから外れるが、「正方形→正三角形」に対して逆の等積変形になっていて、発展的な課題として扱える）。

ここでは体系化と数学の内容を押さえた。体系化を図ることにより、活用されている数学の内容との関係から、児童生徒の学習状況に合わせた教材化を考えることができる。また、部分的に教材化を図ることもできる。例えば小学校の場合であれば、「正方形→正三角形」において、3節の【既習事項4】（正方形を分割して三角形化）を用いて図13のように色分けした正方形を用意しておき、線に沿って切り取らせて、それらを組み合わせて三角形をつくるような教材として取り上げるなどの展開も考えられる。さらに子どもの興味関心が高まれば、4節で示した「正三角形を正方形に等積変形する」方法へと発展させていく展開も考えられる。

7. 最後に

本稿では「どんな四角形も正三角形に等積変形できる」という数学的に美しい性質を教材化するために、一般の四角形を正方形や正三角形という特殊な形へと等積変形する方法に着目し、その体系化を図ることを考えた。2節で見た学生の感想からは、このような題材が児童生徒の興味関心を引き出し、図形に対する理解を深める題材になり得ると捉えられている様子が見て取れた。また、それぞれの等積変形において、多くの既習事項を活用していることを明らかにし、等積変形の流れの体系化を図ることによって、この題材が児童生徒の学習状況に合わせて教材化できることを明らかにした。

自分で実際に等積変形することができれば、図5のように面積の大きさが違って見えても、本当はどうなのかを確かめることができる。今後も、学んだ数学的知識を活用したくなるような場面を組み込んだ教材の開発に取り組んで行きたいと考えている。

註

1）線分ABを1：2に内分する点の作図には、他にもいろいろな方法がある。三例を示す。

「方法1」（1：2に内分する点の作図）

図28のように、点Aを通る任意の直線を引き、この直線上にAC=CD=DEとなる点C, D, Eをとる。点B, Eを結び、点Cを通りBEに平行な直線とABとの交点をPとする。このときAP：PB=AC：CE=1：2である。

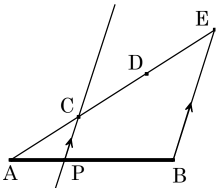


図28　線分を1：2に内分する点

「方法2」（1：2に内分する点の作図）

図29のように、点Aを通る任意の直線上に点Aとは異なる点Qをとる。点Bを通りAQに平行な直線上に、RB=2AQとなる点Rを直線ABに関して点Qとは反対側にとる。ABとQRとの交点をPとするとき、AP：PB=1：2である。

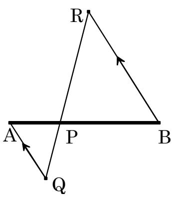


図29　線分を1：2に内分する点

「方法3」（1：2に内分する点の作図）

図30のように、線分ABを一辺とする任意の長方形ABCDをかく。対角線AC, BDの交点をO, ABの中点をMとし、DMとACの交点をEとする。点O, EからABに垂線OM, EPを下す。△EDA∽△EMO, AD=2OMよりAP：PM=AE：EO=2：1、したがって、AP：PB=2：4=1：2である。

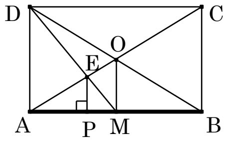


図30　線分を1：2に内分する点

2）本文図9における線分DLの半分の長さも$\frac{1}{\sqrt[4]{3}}a$である。$\frac{1}{\sqrt[4]{3}}a$の作図方法は、他にも以下のようなものがある。

「方法1」（$\frac{1}{\sqrt[4]{3}}a$の作図）

本文図10のようにして、HB=$\frac{1}{\sqrt{3}}a$となる点Hをとる。続いて図31のように、ABの延長上にLB=BAとなる点Lをとる。HLの中点をMとし、点Mを中心とする半径MLの円とBCとの交点をNとする。このとき、BN=$\frac{1}{\sqrt[4]{3}}a$である（**【既習事項1】**を活用）。

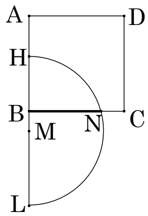


図31　線分の作図

「方法2」（$\frac{1}{\sqrt[4]{3}}a$の作図）

図32のように、一辺の長さがaの正方形ABCDの辺BC上にBF：FC=2：1となる点Fをとる。とり方はいろいろあるが、例えば、辺CDの延長上に2EC=CDとなる点Eをとれば、AEと辺BCとの交点がFとなる。次にFCの中点Gを中心に半径GDの円をかき、辺ABとの交点をHとする。このとき、BH=$\frac{1}{\sqrt{3}}a$となる。続いて図33のように、BHの中点Jを中心に半径JCの円をかき、辺ADとの交点をK

とする。このとき、$AK=\frac{1}{\sqrt[4]{3}}a$となる。

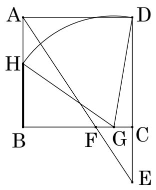


図32　線分の作図

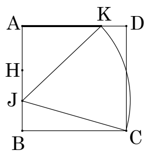


図33　線分の作図

3）図34において、図11で得たIKの長さをもとに正方形ABCDの辺BC上に点Pを取る方法を示す。辺ABの中点をEとし、点Iを通り線分KEに平行な直線と直線ABとの交点をLとする。点Eを中心に半径ELの円をかき、辺BCとの交点をPとする。このとき、$EP=KI\left(=\frac{1}{\sqrt[4]{3}}a\right)$となっている。

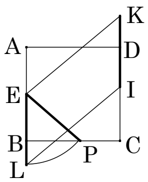


図34　線分の作図

参考文献

「1」中込雄治・黒木伸明：思い込みと教育方法. 宮城学院女子大学発達科学研究2018 No.18, pp.20-29

「2」坂井政夫：図形作図ハンドブック, 平面図形編. SOFT BANK (2002), pp.98-99

「3」中込雄治・有坂哲・黒木伸明：正方形から正三角形への等積変形について. 数学教育学会誌臨時増刊2005年度数学教育学会秋季例会発表論文集, pp.22-24

「4」河村勝久・平野葉一・中島洋介・高木公子：新教育課程における数学教育－「生きる力を育む教育」に関する一考察－. 東海大学教育研究所資料集第7号(1999), pp.101-111

「5」H.Martyn Cundy, A.P.Rollett: Mathematical Models. (Third Edition) Tarquin Publications (1997), pp.23-24